DODATEK DO ROCZNIKA POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO

TOM I

WYDANO Z ZASIŁKU MINISTERSTWA WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO

KRAKÓW 1922
SKŁAD GŁÓWNY GEBETHNER I WOLFF
WARSZAWA — KRAKÓW — POZNAŃ — LUBLIN — ŁÓDŹ

Uwaga. Pierwszy zeszyt czasopisma Polskiego Towarzystwa Matematycznego ukazał się w roku 1921 p. t. *Rozprawy Polskiego Towarzystwa Matematycznego*; wobec tego zeszyt niniejszy stanowi drugi tom publikacji rzeczonego Towarzystwa.

Kraków — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem J. Filipowskiego.

TEORJA WZGLĘDNOŚCI
wobec faktów stwierdzonych doświadczeniem i spostrzeżeniem [1]).

Napisał

Stanisław Zaremba.

§ 1. Teorja względności p. Einsteina [2]) nęci fantazję naukową przez nieograniczony niemal zakres nadziei przez siebie wzbudzanych. Ale, trudno nie wyznać, że teorja ta obiecuje zbyt wiele, ażeby nie skłonić nas do pewnej nieufności, a to tem bardziej, że przyjęcie rzeczonej teorji wymagałoby ogromnych ofiar.

Należy tedy dokładnie zbadać, czy tezy, wysnute z doświadczenia, a podawane przez relatywistów, jako następstwa logiczne przesłanek teorji względności rzeczywiście z tych przesłanek wynikają. Temu właśnie przedmiotowi poświęcamy niniejszą rozprawę.

Cel niniejszej pracy jest tedy zgoła odmienny od celu przyświecającego często pracom twórczym z zakresu fizyki, a polegającego na tem, żeby odkryć jakąś ciekawą tezę, na tyle prawdopodobną, iżby zasługiwała później na głębsze zbadanie. My mamy tylko na względzie rozwiązanie zagadnienia o charakterze wybitnie logicznym, w którym chodzi o sprawdzenie czy pewne tezy rzeczywiście należą do następstw logicznych pewnych przesłanek. Żeby więc celu nie chybić, winniśmy wszelkich dołożyć usiłowań, ażeby

---

[1]) Francuski tekst niniejszej pracy wychodzi obecnie w czasopiśmie: *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

[2]) Zob. w szczególności szereg artykułów ogłoszonych przez p. Einsteina w czasopiśmie *Sitzungsberichte der Berliner Akademie* od r. 1914.

dosięgnąć jaknajwiększej precyzji przy wysławianiu się i jaknajwiększej ścisłości przy dowodach.

Stwierdzimy, że we wszystkich przypadkach, w których relatywiści rzekomo udowodnili, iż pewne tezy, potwierdzone przez doświadczenia lub spostrzeżenia, należą do następstw logicznych przesłanek teorji względności, opierali się oni nietylko na przesłankach tej teorji, ale jeszcze, albo na pewnych przesłankach dodatkowych, logicznie sprzecznych z przesłankami teorji względności, albo na zdaniach, wypowiedzianych bez żadnego już uzasadnienia, a wyrażających sądy, odnoszące się do przypadków zbyt szczegółowych, ażeby mogły być zaliczonemi do przesłanek teorji względności. Upewnimy się nadto, że przesłanki teorji względności nie wystarczają do ustanowienia jakiejkolwiek odpowiedniości wzajemnej pomiędzy liczbowemi wartościami symbolów, występujących w rzeczonej teorji, a jakiemiś pomiarami.

Wobec powyższego stanu rzeczy mowy być obecnie nie może o potwierdzeniu, albo o obaleniu teorji względności na podstawie faktów, stwierdzonych przez jakieś doświadczenia lub spostrzeżenia. Żeby taka kontrola teorji względności stała się możliwą, należałyby uprzednio uzupełnić stosownie zespół jej przesłanek. Śmiem myśleć, że praca niniejsza przekona czytelnika, iż tego rodzaju uzupełnienie teorji względności bynajmniej łatwem nie jest. Ponieważ jednak nie wykazałem, że rzeczone uzupełnienie teorji względności jest niemożliwe, przeto kwestja utrzymania się tej teorji w Nauce pozostaje na razie otwartą i każdy badacz może, nie narażając się na konflikt z logiką, taką w tym względzie wyznawać opinję, która najlepiej dogadza jego umysłowości. W każdym razie należy zaznaczyć, że bez względu na ostateczny los teorji względności, teorja ta wyrządziła pewne usługi Nauce, jużto przez to, iż natchnęła niektórych badaczy do znakomitych prac z zakresu ogólnej geometrji[1]), prac, których wartość naukowa nie zależy od losu teorji względności, jużto przez to, że spowodowała, jak się zdaje[2]), odkrycie nie znanych jeszcze zjawisk.

§ 2. Jakie są podstawy teorji względności? Takie jest zapytanie, na które winniśmy przedewszystkiem odpowiedzieć. Zapyta-

---

[1]) Jedną z takich prac jest niewątpliwie świetna rozprawa p. Levi-Civity o pojęciu równoległości w czasopiśmie *Rendiconti del Circolo Matematice di Palermo* anno 1917 fascicolo II e III, p. 173.

[2]) Odnośne spostrzeżenia nie są jeszcze rozstrzygającemi.

nie to jest trochę kłopotliwe, a to nietylko z tego powodu, że nie wszyscy autorowie przyjmują te same przesłanki, ale jeszcze i przedewszystkiem wskutek tego, iż niektórzy relatywiści świadomie gardzą precyzją języka i ścisłością dowodów, jak to wynika w szczególności z następującego ustępu pierwszego rozdziału dzieła p. Eddingtona [1]), rozdziału, w którym autor podaje swoje poglądy w postaci rozmowy pomiędzy „fizykiem, eksperymentalistą, matematykiem i relatywistą, obrońcą najnowszych koncepcji czasu i przestrzeni w fizyce“.

„*Fizyk*... Czy pan sam ma pewność logiczności określeń wszystkich terminów, któremi pan się posługuje?“

„*Relatywista.* Broń Panie Boże! Ja z natury nie jestem skłonny być wymagającym w tym względzie!...“

Wobec takich warunków trudno jest nieraz stwierdzić na czem właściwie polega myśl autora.

Ponieważ jednak możemy pozostawić na uboczu ostatnie uogólnienia teorji względności, podane kolejno przez p. Weyla [2]) i p. Eddingtona [3]), bo nie poczyniono jeszcze żadnych prób kontroli doświadczalnej tych uogólnień; ponieważ z drugiej strony we wszystkich przypadkach, w których próbowano poddać teorję względności kontroli doświadczalnej, przyjmowano przesłanki, na których p. Hilbert oparł teorję względności, a które przez tego wybitnego matematyka zostały jasno sformułowane, przeto podamy podstawy teorji względności według p. Hilberta, przy czem pozwolimy sobie jednak wypowiedzieć wyraźnie niejedną z rzeczy, zaznaczonych tylko w różnych ustępach obu rozpraw p. Hilberta.

W teorji względności, jak i w każdej innej teorji dedukcyjnej, niepodobna obejść się bez terminów *prymitywnych* [4]) t. j. takich

---

[1]) Eddington. Espace, Temps et Gravitation. Traduit de l'anglais par M. J. Russignol. Paris, Hermann 1921, p. 5.

[2]) H. Weyl. Raum. Zeit. Materie. Berlin, Springer, 1921.

[3]) Eddington. l. c. p. 124, § 50.

[4]) W zagadnieniach z zakresu logiki, które jedynie nas zajmować będą, wyrażenie *termin prymitywny* bynajmniej nie oznacza terminu, będącego nazwą pojęcia pierwotnego zo stanowiska psychologji, t. j. pojęcia wcześniej pojawiającego się w ewolucji umysłu od jakichś innych pojęć. W rzeczywistości nawet prawdziwy stan rzeczy jest zwykle wręcz przeciwny. Więc n. p. w geometrji wyraz *punkt* należy zwykle do terminów prymitywnych, chociaż niewątpliwą jest rzeczą, iż odnośne pojęcie powstaje dopiero w stadjum względnie zaawansowanym

których znaczenie nie jest sprecyzowane zapomocą definicji. Oczywistą jest rzeczą, że, aby jakąś teorję dedukcyjną wyłożyć ściśle, koniecznie należy wyszczególnić terminy prymitywne tej teorji. Winniśmy jeszcze dodać, że jeśli prawdą jest, że terminy prymitywne nie mogą być określone zapomocą definicji, to prawdą jest również, że można, a w interesie ścisłości i należy, w pewnej mierze sprecyzować znaczenie terminów prymitywnych przez wypowiedzenie wszystkich tych zdań, uważanych za sprawdzane przez terminy prymitywne, na których dowody twierdzeń teorji mają być oparte; rzeczone zdania niczem innem nie są, jak *postulatami* odnośnej teorji.

Przy formułowaniu podstaw teorji względności uważać będziemy całą logikę i analizę matematyczną za rzeczy znane, gdyż w tym względzie niema różnic zdań pomiędzy relatywistami a nierelatywistami. Wobec tego poprzestaniemy na podaniu tych tylko postulatów i tych terminów prymitywnych, które nie należą do postulatów i do terminów prymitywnych logiki lub analizy matematycznej, a które nazywać będziemy postulatami i terminami prymitywnemi teorji względności. Zaznaczamy jeszcze, że nie jesteśmy obowiązani do wyszczególnienia wszystkich terminów prymitywnych i wszystkich postulatów teorji względności, lecz, jak też rzeczywiście uczynimy, winniśmy tylko podać te terminy prymitywne, któremi będziemy się posługiwać, oraz te postulaty i definicje, na których nasze rozważania oprzemy.

Uderzy zapewne czytelnika wysoki stopień abstrakcyjności i charakter wybitnie matematyczny postulatów teorji względności. Te właściwości przesłanek teorji względności wynikają ze swoistości struktury rzeczonej teorji. Zamiast rozpoczynania budową teorji względności od dokładnego określenia fizycznego znaczenia symbolów matematycznych mających w daszym ciągu występować, podobnie jak się to czyni we wszystkich innych teorjach fizyki, p. Einstein i jego zwolennicy przyjmują odwrotny porządek wykładu: budują oni teorję, nie sprecyzownwszy uprzednio znaczenia fizycznego symbolów matematycznych, któremi się posługują, odkładając na później sprawę dokładnej interpretacji fizycznej powyższych symbolów; przekonamy się zresztą, że sprawa ta oczekuje dopiero swojego załatwienia.

---

rozwoju umysłowego. Przy wyborze terminów prymitywnych do wykładu jakiejś teorji kierujemy się wyłącznie względami jasności i prostoty wykładu.

Zaznaczamy mimochodem, że ten właśnie stan rzeczy to sprawia, iż niepodobieństwem jest nabyć należyte wyobrażenie o teorji względności bez korzystania w szerokim zakresie z pomocy analizy matematycznej.

§ 3. Jedynemi temi terminami prymitywnemi teorji względności, któremi nam wypadnie posługiwać się, są wyrażenia następujące:

punkt geometryczny, *epoka* czyli *chwila*, *punkt fizyczny* oraz wyraz *poprzedza* w zdaniach postaci „taka a taka chwila *poprzedza* taką a taką chwilę".

Powyższe wyrażenia uważać będziemy za terminy prymitywne wspólne teorji względności i innym teorjom fizyki, ale naturalnie w każdej teorji rzeczone terminy sprawdzać będą postulaty właściwe tej teorji.

Przystępując do podania wykazu tych przesłanek teorji względności, na które wypadnie się nam powoływać, zaznaczamy raz na zawsze, iż rozważać będziemy *wyłącznie* liczby *rzeczywiste*.

Wypowiemy najpierw postulaty i definicje wspólne teorji względności i wszystkim innym teorjom fizyki.

I. Postulat. Każdy punkt geometryczny można skojarzyć z jakąkolwiek epoką.

II. Definicja. Wyrażenie *punktochwila* oznacza wynik skojarzenia jakiegoś punktu geometrycznego z jakąś chwilą.

III. Definicja. Zbiór wszystkich punkto-chwil zowie się *hyperprzestrzenią fizyczną*, a wyrażenie *punktochwila* uważać będziemy za równoważne wyrażeniu *punkt hyperprzestrzeni fizycznej*.

IV. Postulat. Można określić taki zbiór (E) dziedzin w hyperprzestrzeni fizycznej, ażeby uczynić zadość warunkom następującym:

1º Każdy punkt hyperprzestrzeni fizycznej należy przynajmniej do jednej z dziedzin zbioru (E).

2º Jeżeli dwie dziedziny (R) i (R') należą obie do zbioru (E), to dziedziny te stanowią skrajne wyrazy takiego skończonego ciągu dziedzin, należących do zbioru (E), że każda para dziedzin, stanowiących parę wyrazów sąsiednich w powyższym ciągu, posiada przynajmniej jeden punkt wspólny.

3º Jeżeli jakaś dziedzina (R) należy do zbioru (E), to można ustanowić jedno-jednoznaczną odpowiedniość wzajemną pomiędzy punktami dziedziny (R), a temi układami wartości na cztery zmienne

x_1, x_2, x_3, x_4, które stanowią łącznie pewien zbiór punktów (X_r) w przestrzeni arytmetycznej czterowymiarowej.

V. Definicja. Żeby wyrazić, iż jakaś dziedzina hyperprzestrzeni fizycznej jest elementem jakiegoś zbioru (E) o własnościach wyszczególnionych wyżej, mówić będziemy, że ta dziedzina jest *elementarną* dziedziną, położoną w hyperprzestrzeni fizycznej, a sam zbiór (E) nazywać będziemy *pełnym* zbiorem dziedzin elementarnych; przy powyżej określonym znaczeniu symbolów (R), x_1, x_2, x_3, x_4 i (X_r) układ zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4 nazywać będziemy *układem spółrzędnych* punktu dziedziny (R), a zbiorowi (X_r) punktów arytmetycznych nadamy miano *obrazu arytmetycznego* dziedziny (R).

VI. Postulat. Pełny zbiór dziedzin elementarnych, położonych w hyperprzestrzeni fizycznej można tak określić, żeby każda z tych dziedzin elementarnych mogła być odniesioną do układu spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t spełniającego warunki następujące:

1° Zbiór wszystkich wartości zmiennej t, odpowiadających poszczególnym punktom odnośnej dziedziny elementarnej (R), stanowi jakiś przedział otwarty[1]) (J).

2° Przedziałowi (J) odpowiada taki zbiór chwil (C), że pomiędzy wartościami na t, należącemi do przedziału (J), a chwilami, należącemi do zbioru (C), zachodzi jedno-jednoznaczna odpowiedniość wzajemna.

3° Jeżeli z dwóch wartości t_1 i t_2 na t, należących do przedziału (J) pierwsza jest mniejsza od drugiej, to któraś jedna z chwil, odpowiadających wartościom t_1 i t_2 na t, a mianowicie chwila, odpowiadająca wartości t_1 na t, poprzedza chwilę, odpowiadającą wartości t_2 na t, przynajmniej w odniesieniu do układu spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t.

VII. Definicja. W razie przyjęcia oznaczeń, określonych przy wypowiadaniu postulatu poprzedniego, mówić będziemy, że zbiór wszystkich chwil, należących do przedziału (J) i odpowiadających wartościom na t, spełniającym związek

$$t \leqq t'$$

gdzie t' oznacza jakąś liczbę, należącą do przedziału (J), stanowi czas, odpowiadający dziedzinie (R) i układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t, mierzony przez liczbę t'; żeby wyrazić, iż spółrzędna t punktu

---

[1]) Przedziałem otwartym zowiemy przedział, którego granice już do tego przedziału nie należą.

dziedziny (R) spełnia warunki, wypowiedziane w postulacie VI mówimy, że ta spółrzędna przedstawia czas dziedziny (R) w układzie spółrzędnych x_1, x_2, x_4, t.

VIII. Postulat. Jeżeli w odniesieniu do jakiegoś układu spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t punktu jakiejś dziedziny elementarnej (R), położonej w hyperprzestrzeni fizycznej, zmienna t przedstawia czas w myśl def. VII, a układami wartości $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, t_0$ na zmienne x_1, x_2, x_3, t odpowiada jakiś punkt P dziedziny (R), to układowi wartości $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$ na zmienne x_1, x_2, x_3 odpowiada oznaczony punkt geometryczny, a wynikiem skojarzenia tego punktu geometrycznego z chwilą, określoną przez wartość t_0 zmiennej t, jest punkt P hyperprzestrzeni fizycznej.

IX. Definicja. Zachowawszy oznaczenia, określone w postulacie poprzednim, oznaczony jeszcze przez (X_{t_0}) zbiór wszystkich tych układów wartości na zmienne x_1, x_2, x_3, z których każdy, po skojarzeniu go z wartością t_0 na t, określa jakiś punkt dziedziny (R); w takim razie mówić będziemy, że zbiór punktów geometrycznych, odpowiadających tym układom wartości na x_1, x_2, x_3, z których każdy należy do zbioru (X_{t_0}), stanowi *część przestrzeni*, odpowiadającej układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t, zawartej w dziedzinie (R) w chwili t_0

X. Postulat. Każdy punkt fizyczny M zachowuje niezmiennie swoją indywidualność i znajduje się w każdej danej chwili E w jakimś punkcie geometrycznym A; żeby wyrazić powyższy związek pomiędzy elementami M, E i A mówić będziemy, że w chwili E punkt fizyczny M znajduje się w tym punkcie P hyperprzestrzeni fizycznej, który jest wynikiem skojarzenia punktu geometrycznego A z chwilą E.

XI. Postulat. Jeżeli oznaczony punkt fizyczny M znajduje się w dwóch różnych chwilach E_1 i E_2 w dwóch punktach hyperprzestrzeni fizycznej należących do tej samej dziedziny elementarnej (R), jeżeli prócz tego dziedzina (R) jest jedna z tych, których istnienie zapewnione jest przez postulat VI, to któraś pewna z chwil E_1 i E_2 poprzedza drugą, bez względu na układ spółrzędnych, do których dziedzina (R) jest odniesioną, byle w tym układzie spółrzędnych jedna z tychże oznaczała czas.

Do powyższych postulatów i definicji wspólnych wszystkim koncepcjom fizyki, dołączymy jeszcze postulat następujący, charakterystyczny dla teorji względności.

XII. Postulat charaterystyczny teorji względności[1]. Istnieje taki pełny układ dziedzin elementarnych (def. V), położonych w hyperprzestrzeni fizycznej, a którym damy nazwę *dziedzin regularnych*, że każda z tych dziedzin odniesioną być może do układu spółrzędnych, zwanego *regularnym* układem, scharakteryzowanego przez własności następujące:

1° Jeżeli jakaś dziedzina regularna (R) hyperprzestrzeni fizycznej odniesiona jest do regularnego układu spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4, to odnośnym obrazem arytmetycznym (def. V) dziedziny (R) jest jakaś dziedzina jednospójna otwarta[2] (X) położona w przestrzeni arytmetycznej czterowymiarowej.

2° Każdemu regularnemu układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4 punktu regularnej dziedziny (R), położonej w hyperprzestrzeni fizycznej, odpowiada pewien układ dziesięciu funkcji

$$g_{ik} = g_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4, określonych w obrębie odnośnego obrazu arytmetycznego (X_r) dziedziny (R) jako funkcje jednowartościowe rozważanych zmiennych; p. Einstein nadał funkcjom g_{ik} nawę *potencjałów grawitacyjnych*.

---

[1]) W postulacie tym wypowiemy wiele rzeczy zaznaczonych tylko przez napomknienia w rozprawach p. Hilberta, ale nie sądzę, ażebym w czymkolwiek zmienił myśl tego autora Zwrócić się w szczególności do następujących ustępów prac p. Hilberta *Göttinger Nachrichten* 1915, Heft 3, p. 395, oraz w tymże czasopiśmie 1917 Heft 1, p. 57.

[2]) Orzeczenie, że dziedzina (X), położone w przestrzeni arytmetycznej n-wymiarowej, jest dziedziną jednospójną otwartą, wyraża, że istnieje taki układ n funkcji

$$f_i(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

kreślonych w obrębie dziedziny (X) jako funkcje jednowartościowe i ciągłe zmiennych x_1, x_2, x_n, że równania

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

ustanawiają jedno-jednoznaczną odpowiedniość wzajemną pomiędzy punktami dziedziny (X) a punktami dziedziny, określonej przez nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 < 1.$$

3° Potencjały grawitacyjne g_{ik} spełniają w każdym punkcie dziedziny (X_r) nierówność

$$\begin{vmatrix} g_{11}, & g_{12}, & g_{13}, & g_{14} \\ g_{21}, & g_{22}, & g_{23}, & g_{23} \\ g_{31}, & g_{32}, & g_{33}, & g_{34} \\ g_{41}, & g_{42}, & g_{43}, & g_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

i posiadają pochodne cząstkowe ciągłe aż do pewnego rzędu p włącznie; przyjmiemy, że $p = 3$, bo jest to najmniejsza wartość, jaką przypisać należy liczbie p, ażeby uzasadnić rachunki, jakie zwykle napotykamy w teorji względności.

4° Jeżeli zespół zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4. przedstawia regularny układ spółrzędnych punktu regularnej dziedziny (R), położonej w hyperprzestrzeni fizycznej, to warunki konieczne i wystarczające, ażeby wzory

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

określały zespół zmiennych x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, jako nowy regularny układ spółrzędnych punktu dziedziny (R) są następujące:

a) Funkcje $f_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ określone są w obrębie obrazu arytmetycznego dziedziny (X_r) (R). odpowiadającego układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4 jako funkcje jednowartościowe i ciagłe, posiadające pochodne cząstkowe ciągłe aż do rzędu 4 włącznie.

b) Jeżeli oznaczymy przez (X'_r) wynik przekształcenia dziedziny (X_r) przez podstawienie (1), to wzory (1) przyporządkowują punktowi dziedziny (X'_r) jeden tylke punkt dziedziny (X_r).

c) W obrębie całej dziedziny (X_r) mamy

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3, f_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} \neq 0$$

5) Jeżeli wzory (1) są wzorami na przejście od jakiegoś jednego regularnego układu spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4 punktu jakiejś dziedziny regularnej (R), położonej w hyperprzestrzeni fizycznej, do jakiegoś drugiego regularnego układu spółrzędnych x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 punktu tejże dziedziny, to równania (1) pociągają za sobą równość

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx_i\, dx_4 = \sum_{i,k=1}^{4} g'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k,$$

gdzie funkcje g_{ik} i g'_{ik} przedstawiają potencjały grawitacyjne, należące odpowiednio do układów spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4, i x'_1, x'_2, x'_3, x'_4.

6) Niech (R) oznacza jakąś regularną dziedzinę, położoną w hyperprzestrzeni fizycznej, a (X_r) niech oznacza obraz arytmetyczny dziedziny (R), odpowiadający jakiemuś regularnemu układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4 punkta rozważanej dziedziny.

Jeżeli tedy oznaczymy przez $(X_r^{(1)})$ jakąś dziedzinę jednospójną i otwartą położoną w obrębie dziedziny (X_r), a przez $(R^{(1)})$ tę część dziedziny (R), którą układ spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4 przyporządkowuje dziedzinie $(X_r^{(1)})$, to w takim razie przez dołączenie dziedziny $(R^{(1)})$ do tego pełnego układu (E) regularnych dziedzin elementarnych, do którego należy dziedzina (R), uzyskamy nowy pełny układ dziedzin regularnych elementarnych, położonych w hyperprzestrzeni fizycznej.

7⁰ Oznaczmy przez (R_1) i (R_2) dwie dziedziny regularne elementarne, położone w hyperprzestrzeni fizycznej, a przez (E_1) i (E_2) te pełne układy dziedzin regularnych elementarnych, do których należą odpowiednie dziedziny (R_1) i (R_2). Nie zakładając, ażeby układy (E_1) i (E_2) były koniecznie jeden od drugiego odmienne, przyjmijmy tylko, że dziedziny (R_1) i (R_2) mają jakiś punkt wspólny A. W takim razie istnieć będzie w hyperprzestrzeni fizycznej pewna dziedzina (R_0), zawierająca punkt A, zawarta w każdej z dziedzin (R_1) i (R_2), a nadto taka, że przez jej dołączenie do któregokolwiek z układów (E_1) albo (E_2) otrzymamy jakiś nowy pełny układ dziedzin regularnych elementarnych, położonych w hyperprzestrzeni fizycznej.

8) Jeżeli dwie dziedziny (R) i (R'), położone w hyperprzestrzeni fizycznej należą do tego samego pełnego układu dziedzin regularnych elementarnych, jeżeli nadto dziedzina (R') jest zawarta w dziedzinie (R), a układ zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4 i układ

$$g_{ik} = g_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

funkcji tych zmiennych stanowią odpowiednio jakiś regularny układ spółrzędnych punktu dziedziny (R) i odnośny układ potencjałów grawitacyjnych, to układ zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4 i układ funkcji g_{ik} stanowić będą odpowiednio jakiś regularny układ spółrzędnych punktu dziedziny (R') i odnośny układ potencjałów grawitacyjnych, jeżeli tylko za zakres punktu arytmetycznego x_1, x_2, x_3, x_4 przyjmiemy tę część obrazu arytmetycznego dziedziny (R), odpowiadającego układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4, którą ten układ spółrzędnych przyporządkowuje części (R) dziedziny (R).

9° Pośród różnych regularnych układów spółrzędnych punktu regularnej elementarnej dziedziny hyperprzestrzeni fizycznej, istnieją pewne szczególne układy spółrzędnych, którym nadamy miano *normalnych* układów spółrzędnych, a których własności charakterystyczne są następujące:

A) Jedna z czterech zmiennych x_1, x_2, x_3, x_4, które łącznie stanowią normalny układ spółrzędnych punktu regularnej dziedziny elementarnej (R), położonej w hyperprzestrzeni fizycznej, przedstawia czas w myśl def. VII.

B) Jeżeli funkcje

$$g_{ik} = g_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

przedstawiają potencjały grawitacyjne, odpowiadające normalnemu układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4 punktu dziedziny (R), a oznaczenia tak są dobrane, że zmienna x_4 przedstawia czas, to w takim razie, w obrębie odnośnego obrazu arytmetycznego (X_r) dziedziny (R), zachodzą nierówności następujące[1]:

$$g_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11}, & g_{12} \\ g_{21}, & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_{11}, & g_{12}, & g_{13} \\ g_{21}, & g_{22}, & g_{23} \\ g_{31}, & g_{32}, & g_{33} \end{vmatrix} > 0, g_{44} < 0.$$

Ze względu na ogólne zasady geometrji metrycznej przestrzeni arytmetycznej wielowymiarowej i na własności, przysługujące na podstawie powyższego postulatu potencjałom grawitacyjnym, nadamy formie różniczkowej

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

której spółczynniki przedstawiają potencjały grawitacyjne, odpowiadające spółrzędnym x_1, x_2, x_3, x_4 punktu jakiejś regularnej elementarnej dziedziny (R), położonej w hyperprzestrzeni fizycznej, nazwę *formy metrycznej* tej dziedziny, formy odpowiadającej układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, x_4.

Zespół 12-tu powyższych postulatów i definicji charakteryzuje relatywistyczną koncepcję hyperprzestrzeni fizycznej. Prócz rzeczonych postulatów wypadnie nam uwzględnić jeszcze tylko dwa po-

---

[1]) Hilbert, Zweite Mitheilung, *Göttinger Nachrichten*, 1914, Heft 1, p. 57.

stulaty, charakteryzujące tak zwaną małą teorję względności, a mające być podanemi później.

Oczywistą jest rzeczą, że jednym z koniecznych warunków możliwości eksperymentalnej kontroli teorji względności jest istnienie przypadków, w którychby pomiary spółrzędnych jakichś punktów fizycznych mogły być dokonane zapomocą stosownych narzędzi. Winniśmy tedy zbadać, czy relatywiści ustanowili w sposób logicznie poprawny, przynajmniej w niektórych przypadkach, odpowiedniość wzajemną pomiędzy jakiemiś pomiarami a liczbowemi wartościami spółrzędnych jakicheś punktów fizycznych.

§ 4. Zanim zwrócimy się do zbadania powyższej kwestji, konieczną jest rzeczą, żebyśmy zanalizowali teoretyczne podstawy pomiarów spółrzędnych w fizyce nierelatywistycznej, a to nie tylko w tym celu, żeby ułatwić zrozumienie dalszych wywodów, lecz jeszcze i z tej przyczyny, że, jak to stwierdzimy niżej, relatywiści zastosowują do kontroli teorji względności metody pomiarów fizyki nierelatywistycznej. Należy więc przedewszystkiem sformułować podstawy nierelatywistycznej koncepcji hyperprzestrzeni fizycznej.

Zaznaczyliśmy już wyżej, że obie koncepcje hyperprzestrzeni fizycznej można sformułować zapomocą tych samych terminów prymitywnych i podnieśliśmy już, że zespół pierwszych 11-tu postulatów i definicji, podanych w paragrafie poprzednim, stanowi wspólną część podstaw obu koncepcji hyperprzestrzeni fizycznej. Wystarczy więc podać postulat, przez który należy zastąpić postulat XII-ty, ażeby przejść od relatywistycznej koncepcji hyperprzestrzeni fizycznej do koncepcji nierelatywistycznej.

Żeby uniknąć komplikacji, które w niczem nie przyczyniłyby się do wyjaśnienia rzeczy, nie będziemy się kusić o to, ażeby osiągnąć jaknajwiększy stopień ogólności przy podaniu nierelatywistycznej koncepcji hyperprzestrzeni fizycznej. Z drugiej jednak strony, aby należycie uwydatnić teoretyczne podstawy pomiarów spółrzędnych w fizyce nierelatywistycznej, wzniesiemy się ponad tradycyjne stanowisko, z którego przyjmuje się z góry ważność geometrji euklidesowej. Ostatecznie przyjmiemy charakterystyczny postulat nierelatywistycznej koncepcji hyperprzestrzeni fizycznej w postaci następującej:

XII a. Postulat charakterystyczny nierelatywistycznej koncepcji hyperprzestrzeni fizycznej. Cała hyperprzestrzeń fizyczna

uważaną być może za jedną dziedzinę elementarną w myśl def. V, a pośród różnych układów spółrzędnych, do których hyperprzestrzeń fizyczną można odnieść, istnieją układy spółrzędnych, którym nadamy miano *normalnych* układów, a które scharakteryzowane są przez własności następujące:

1° Obraz arytmetyczny {def. V p. 6} hyperprzestrzeni fizycznej, odniesionej do normalnego układu spółrzędnych, zlewa się z całą przestrzenią arytmetyczną czwórwymiarową.

2° Jedna z czterech zmiennych, tworzących łącznie jakiś normalny układ spółrzędnych (S) punktu hyperprzestrzeni fizycznej, powiedzmy zmienna t, przedstawia, w myśl def. VII, czas, odpowiadający układowi (S).

3° Trzem pozostałym zmiennym, x_1, x_2, x_3, tworzącym ze zmienną t normalny układ spółrzędnych (S), odpowiada forma różniczkowa

$$(1) \qquad \sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, dx_i\, dx_k, \qquad h_{ik} = h_{ki}$$

której spółczynniki h_{ik} są jednowartościowemi funkcjami samych tylko zmiennych x_1, x_2, x_3, a więc funkcjami niezależnemi od zmiennej t; funkcje h_{ik} posiadają pochodne cząstkowe ciągłe przynajmniej aż do pewnego rzędu p włącznie; założymy, że $p = 3$, bo jest to najmniejsza wartość na p, przy której łatwo jest uzasadnić twierdzenia, na których wypadnie nam się opierać.

4° Forma (1) uważaną być może za formę metryczną przestrzeni arytmetycznej trójwymiarowej o krzywiźnie stałej; formie tej nadamy miano *formy metrycznej*, odpowiadającej układowi spółrzędnych (S).

5° Przy powyższem znaczeniu symbolów x_1, x_2, x_3, t, warunki konieczne i wystarczające, ażeby jakieś wzory, wyrażające jakieś zmienne x'_1, x'_2, x'_3, t' w postaci funkcji zmiennych x_1, x_2, x_3, t, stanowiły wzory na przejście od normalnego układu spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t do jakiegoś drugiego normalnego układu spółrzędnych x'_1, x'_2, x'_3, t' punktu hyperprzestrzeni fizycznej, w którymby zmienna t' przedstawiała czas, są następujące:

a) Wspomniane wzory winny być postaci następującej:

$$(2) \qquad \begin{cases} x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, t) & i = 1, 2, 3 \\ t' = at + b \end{cases}$$

gdzie a i b są liczby stałe, z których a jest dodatnią, a funkcje $f_i(x_1, x_2, x_3, t)$, funkcjami jednowartościowemi o pochodnych cząstkowych ciągłych przynajmniej aż do czwartego rzędu włącznie w obrębie całej przestrzeni arytmetycznej czterowymiarowej.

b) Równania (2) przyporządkowują każdemu układowi wartości na zmienne x_1', x_2', x_3', t' dokładnie jeden układ wartości na zmienne x_1, x_2, x_3, t.

c) Przy każdym układzie wartości na zmienne x_1, x_2, x_3, t, zachodzi nierówność

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0.$$

d) Wynikiem przekształcenia formy (1) przez podstawienie (2) w razie przyjścia

$$dt = 0$$

jest forma różniczkowa postaci

$$\sum_{i,k=1}^{3} f_{ik}\, dx_i'\, dx_k,$$

której spółczynniki zależą jedynie od zmiennych x_1', x_2', x_3', a nie od zmiennej t'.

5⁰ Jeżeli powyższe warunki są spełnione, to spółczynniki formy metrycznej

$$\sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}'\, dx_i'\, dx_k',$$

odpowiadającej nowemu normalnemu układowi spółrzędnych x_1', x_2', x_3', t', spełniają równania

$$(\alpha) \qquad h_{ik}' = \lambda f_{ik}, \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

gdzie λ przedstawia liczbę dodatnią[1]), której wartość można ozna-

---

[1]) Przez wprowadzenie liczby dodatniej dowolnej λ osiągamy to, że określiwszy już w zupełności odpowiedniość wzajemną pomiędzy punktami hyperprzestrzeni fizycznej a układami wartości czterech zmiennych, mających stanowić normalny układ spółrzędnych punktu hyperprzestrzeni fizycznej, można jeszcze będzie oznaczyć dowolnie ten element, który określony zostanie niżej jako *jednostka długości*, odpowiadająca rozważnemu układowi spółrzędnych.

czyć dowolnie, a która, po oznaczeniu jej wartości, określa w zupełności, łącznie ze wzorami (2) naturę układu spółrzędnych x'_1, x'_2, x'_3, t'.

Postulat poprzedni wraz z jedenastoma pierwszemi z postulatami i definicjami, wyszczególnionemi w paragrafie poprzednim, określa w zupełności nierelatywistyczną koncepcję hyperprzestrzeni fizycznej. Układ 12-tu przesłanek w ten sposób uzyskanych nie stanowi układu przesłanek logicznie niezależnych, ale okoliczność ta jest obojętną wobec celu, jaki mamy na względzie.

§ 5. Przyjmijmy nierelatywistyczną koncepcję hyperprzestrzeni fizycznej i zbadajmy w jakich warunkach i w jaki sposób możnaby w takim razie dokonywać pomiarów spółrzędnych punktu fizycznego.

Sądzimy, że możemy, tytułem prawdy oczywistej, przyjąć aksjomat następujący:

(A). **Aksjomat.** Jakąkolwiek koncepcję hyperprzestrzeni fizycznej przyjętoby, dokonywanie pomiarów spółrzędnych punktów fizycznych stanie się możliwem tylko po uprzednim rozwiązaniu zagadnień następujących:

1⁰ Podać teoretyczną definicję narzędzi mierniczych do pomiarów spółrzędnych; innemi słowy określić te układy punktów fizycznych, które, o ileby istniały, byłyby rzeczonemi narzędziami w postaci doskonałej.

2⁰ Oznaczyć takie rzeczywiście istniejące układy punktów fizycznych, które miałyby być uważane za nadające się do zastępowania powyższych narzędzi teoretycznych z dostatecznym stopniem przybliżenia przynajmniej w pewnych przypadkach i, ewentualnie, w razie wykonania pewnych poprawek wyników uzyskanych za ich pomocą.

Żeby wyjaśnić, w jaki sposób fizyka nierelatywistyczna spełnia warunki powyższego aksjomatu, załóżmy, że hyperprzestrzeń fizyczna została odniesiona do jakiegoś normalnego układu spółrzędnych (postulat XII a) x_1, x_2, x_3, t, w którym zmienna t oznaczałaby czas.

Na podstawie postulatu VIII (str. 6) układ trzech zmienych x_1, x_2, x_3 będzie stanowić układ spółrzędnych, do którego odniesiony być może zbiór wszystkich punktów geometrycznych czyli przestrzeń odpowiadająca układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t punktu hyperprzestrzeni fizycznej. Z uwagi na tę okoliczność mówić będziemy,

że te trzy z czterech spółrzędnych punktu fizycznego, które przedstawiają wartości zmiennych x_1, x_2, x_3 i określają punkt geometryczny, w którym rozważany punkt fizyczny znajduje się w chwili, określonej przez czwartą spółrzędną, stanowią *przestrzenne* spółrzędne rzeczonego punktu fizycznego. Punkt geometryczny, w którym w jakiejś chwili jakiś punkt fizyczny się znajduje, nazywać będziemy *położeniem* rzeczonego punktu fizycznego w rozważanej chwili.

Przez wyrażenie *regularny łuk geometryczny* oznaczać będziemy taki zbiór ($Ł$) punktów geometrycznych, któremu przyporządkować można układ równań postaci

$$x_i = f_i(\lambda), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

spełniający warunki następujące:

1⁰ Funkcje $f_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, 3)$ perametru λ są określone w obrębie pewnego przedziału właściwego zamkniętego[1]) (λ_1, λ_2), $(\lambda_1 < \lambda_2)$ jako funkcje jednowartościowe i ciągłe, posiadające w całym tym przedziale pochodne ciągłe[2]), nie obracające się wszystkie trzy w zero przy żadnej wartości na λ, należącej do przedziału (λ_1, λ_2).

2⁰ Przy każdej wartości na λ w obrębie przedziału zamkniętego (λ_1, λ_2) wzory (1) określają spółrzędne jakiegoś punktu zbioru ($Ł$).

3⁰ Każdemu punktowi zbioru ($Ł$) odpowiada w obrębie przedziału (λ_1, λ_2) dokładnie jedna wartość na λ, przy której wzory (1) określają spółrzędne tego punktu.

W razie spełnienia warunków powyższej definicji przez równania (1) mówić będziemy, że są to *normalne* równania łuku ($Ł$); punkty odpowiadające wartościom λ_1 i λ_2 na λ, zowie się końcami łuku ($Ł$).

---

[1]) Wyrażenie przedział właściwy zamknięty (λ_1, λ_2), $(\lambda_1 < \lambda_2)$ oznacza zbiór wszystkich liczb λ spełniających związki

$$\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2,$$

przyczem λ_1 i λ_2 są jakieś dwie liczby rzeczywiste.

[2]) Jeżeli a jest jedną z granic jakiegoś przedziału (p) w obrębie którego jakaś funkcja $f(\lambda)$ jest określona, to w takim razie, przy $x = a$, funkcja $f(\lambda)$ nie może mieć właściwej pochodnej, a tylko pochodną jednostronną, przedstawiającą granicę wyrażenia $\frac{f(\lambda) - f(a)}{\lambda - a}$ gdy λ zmierza do a, pozostając *wewnątrz* przedziału (p). Jednakowoż, dla skrócenia, nazywać będziemy ową pochodną jednostronną pochodną funkcji $f(\lambda)$ przy $\lambda = a$.

Założywszy, że forma różniczkowa

$$\sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

przedstawia formę metryczną (postulat XII a) odpowiadającą układami spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t, uważać będziemy za długość, szacowaną w tym układzie spółrzędnych, regularnego łuku geometrycznego, którego równaniami normalnemi, przy zakresie (λ_1, λ_2) na parametra λ, są równania (1), liczbę s, określoną przez wzór

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\sum_{i,k=1}^{3} h_{ik} f_i'(\lambda) f_k'(\lambda)}\; d\lambda$$

gdzie na pierwiastek należy przyjąć wartość dodatnią.

Zwykła terminologja nastręcza następującą skróconą postać powyższej definicji: przestrzeń, odpowiadająca normalnemu układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t, posiada oznaczoną formę metryczną, a mianowicie

$$\sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, dx_i\, dx_k.$$

Z uwagi na tę samą terminologję uważać będziemy za geodetyki przestrzeni, odpowiadającej normalnemu układowi spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t, zbiory punktów, spełniające dobrze znane równania różniczkowe następujące:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x_1'} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gdzie

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{3} h_{ik}\, x_i'\, x_k'.$$

Przez wyrażenie *odległość* dwóch punktów geometrycznych A i B, szacowaną w normalnym układzie spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t, oznaczać będziemy minimum długości, szacowanej w tym układzie, łuku geometrycznego regularnego o końcach A i B.

Jeżeli oznaczymy przez P i Q dwa punkty fizyczne, zachowując przytem poprzednie znaczenia na symbole x_1, x_2, x_3, t, to *od-*

ległością ich w *chwili* $t = t^0$, szacowaną w układzie spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t, nazywać będziemy odległość szacowaną w tymże układzie, tych dwóch punktów geometrycznych, które przedstawiają odpowiednio położenia punktów P i Q w chwili $t = t_0$.

Uważajmy obok normalnego układu spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t jakiś drugi normalny układ spółrzędnych x_1', x_2', x_3', t' punktu hyperprzestrzeni fizycznej, zakładając przytem, że t' przedstawia czas, odpowiadający układowi x_1', x_2', x_3', t'.

Oznaczmy jeszcze przez t_0 jakąś wartość na t, a przez t_0' odpowiadającą jej wartość na t'. Opierając się tedy na postulacie XII a łatwo uzasadnimy twierdzenie następujące:

(B) Twierdzenie. Jeżeli oznaczymy przez s odległość punktów fizycznych P i Q, w chwili $t = t_0$, szacowaną w układzie spółrzędnych x_1, x_2, x_3, t, a przez s' odległość tychże punktów szacowaną w układzie $x_1', x_2' x_3', t'$, w chwili t_0', to mieć będziemy

$$s' = \mu s,$$

gdzie μ oznacza jakąś liczbę dodatnią, której wartość zależy jedynie od wzorów na przejście od układu x_1, x_2, x_3, t do układu x_1', x_2', x_3', t' i od stałej λ, występującej w równaniach (α) (str. 14), nie zaś od wyboru punktów P i Q i od wartości liczby t_0.

Podajemy obecnie definicję, mającą podstawe znaczenie przy dalszych rozważaniach.

(C) Definicja. Orzeczenie, że jakiś układ (S) punktów fizycznych stanowi układ sztywny czyli ciało *sztywne* wyraża, że odległości wzajemne punktów fizycznych układu (S), szacowane w jakimkolwiek normalnym układzie spółrzędnych, są niezależne od chwili, której odpowiadają.

Z brzmienia powyższej definicji wynika, że ewentualna własność sztywności jakiegoś układu punktów fizycznych (S) jest *bezwzględną* własnością tego układu w tym sensie, że wykluczoną jest rzeczą, ażeby odpowiedź na zapytanie czy jakiś oznaczony układ punktów fizycznych jest sztywny różnie mogła wypaść zależnie od bliższego sprecyzowania jakichś okoliczności w powyższej definicji nie oznaczonych; krótko mówiąc, ewentualna własność sztywności jakiegoś układu punktów fizycznych jest *wewnętrzną* jego własnością.

Opierając się na twierdzeniu (B) łatwo uzasadnić twierdzenie następujące: żeby jakiś układ punktów fizycznych był sztywny, wystarcza, ażeby warunek sztywności, podany w definicji (C), był speł-

niony chociażby tylko odnośnie do jakiegoś jednego normalnego układu spółrzędnych punktu hyperprzestrzeni fizycznej.

Sądzimy, że, nie narażając się na nieporozumienia, możemy wypuścić definicje wyrażeń następujących; *łuk regularny sztywny* i *długość* łuku regularnego sztywnego, szacowana w jakimś oznaczonym normalnym układzie spółrzędnych punktu hyperprzestrzeni fizycznej. Podajemy tedy bezpośrednio, bardzo łatwe do uzasadnienia twierdzenia następujące:

(D) Twierdzenie. Każdej parze dwóch normalnych układów spółrzędnych (X) i (X') punktu hyperprzestrzeni fizycznej odpowiada oznaczona liczba dodatnia μ (równa tej, którą oznaczyliśmy przez tenże symbol w tw. (B)) taka, że jeśli symbol s oznacza długość jakiegoś regularnego łuku sztywnego, szacowaną na układzie (X), a s' — długość tegoż łuku szacowaną w układzie (X'), to w takim razie mamy

$$s' = \mu s.$$

(E) Twierdzenie. Dowolnie danemu łukowi regularnemu sztywnemu $(Ł)$ i dowolnie danej liczbie dodatniej s_0 odpowiada taka klasa (K) normalnych układów spółrzędnych punktu hyperprzestrzeni fizycznej, że długość łuku $(Ł)$, szacowana w jakimkolwiek układzie spółrzędnych klasy (K) równa się dokładnie liczbie s_0.

Zaznaczamy jeszcze, że na podstawie klasycznej teorji przestrzeni arytmetycznych o krzywiźnie stałej, mamy twierdzenie następujące:

(F) Twierdzenie. Ilość stopni swobody ciała sztywnego dosięga (ze względu na część 4^0 postulatu XII a) największej wartości możliwej ze względu na definicję (C), a więc liczby 6 w przypadku, kiedy w żadnej chwili wszystkie punkty rozważanego ciała fizycznego nie znajdują się na tej samej geodetyce przestrzeni, odpowiadającej jakiemuś normalnemu układowi spółrzędnych punktu hyperprzestrzeni fizycznej.

Żeby, przyjąwszy nierelatywistyczną koncepcję hyperprzestrzeni fizycznej, módz wykonywać pomiary normalnych spółrzędnych punktu tejże, potrzeba rozporządzać jednostką długości goniometrem i zegarem. Spełnimy oczywiście pierwszy warunek aksjomatu (A) odnośnie do jednostki długości przez przyjęcie definicji następującej:

(G) Definicja. Wyrażenie *jednostka długości* oznacza łuk regularny sztywny w warunkach następujących:

1^0 Jeżeli hyperprzestrzeń fizyczna zostanie odniesioną do jakiegokolwiek normalnego układu spółrzędnych, to w każdej chwili zbiór położeń poszczególnych punktów fizycznych rozważanego łuku sztywnego u stanowi łuk jakiejś geodetyki przestrzeni, odpowiadającej normalnemu układowi spółrzędnych, do którego odniesiono hyperprzestrzeń fizyczną.

2^0 Przyjęto umowę, mocą której długości łuków geometrycznych regularnych będą szacowane w takich i tylko takich normalnych układach spółrzędnych punktu hyperprzestrzeni fizycznej w których liczba

$$1$$

przedstawia długość łuku u.

Zaznaczamy, że na podstawie tw. (E), można przyjąć za jednostkę długości dowolnie oznaczony łuk sztywny regularny, byle spełniający warunek 1^0 powyższej definicji. Żeby uczynić zadość warunkowi 2^0 aksjomatu (A), nierelatywiści przyjmują postulat następujący:

(H) Postulat. Ciała pospolicie zwane ciałami stałemi, a więc np. sztuki stali, brązu etc. mogą być uważane za ciała sztywne w myśl definicji (C) z wystarczającym stopniem przybliżenia, przynajmniej przy pewnych warunkach (działanie tylko dostatecznie małych sił na rzeczone ciała i dostatecznie małe zmiany temperatury ośrodka, w którem się znajdują).

Na podstawie postulatu poprzedniego i faktu doświadczalnego, że ciało sztywne można rzeźbić, zdołamy nadać jakiemuś ciału stałemu taki kształt, żeby jedna z jego krawędzi (H) przedstawiała w przybliżeniu łuk regularny sztywny, którego każde położenie zlewałoby się z jakąś geodetyką przestrzeni. Wystarczy tedy oświadczyć, że krawędź (K) powyższego ciała uważana będzie za dostatecznie dokładną przedstawicielkę jednostki długości, ażeby spełnić i drugi warunek aksjomatu (A) w odniesieniu do jednostki długości. Z łatwością stwierdzamy, że definicja (C) i postulat (H) umożliwiają także spełnienie warunków aksjomatu (A) i w odniesieniu do goniometra (co prawda bardzo prymitywnego).

Żeby posunąć się dalej, zważmy, iż opierając się na definicji (C), można łatwo uzasadnić twierdzenie następujące: po oznaczeniu jednostki długości zawsze znajdzie się pośród normalnych układów spółrzędnych, dopuszczalnych w myśl definicji (G) wobec przyjętej

jednostki długości, taki normalny układ spółrzędnych punktu hyperprzestrzeni fizycznej, że spółrzędne przestrzenne każdego punktu fizycznego jakiegoś danego ciała sztywnego (S) będą w rozważanym układzie liczbami stałemi. Weźmy tedy pod uwagę jakieś ciało realne (np. ziemię), mogące być uważane za dane ciało sztywne (S) i, ustanowiwszy jednostkę długości w sposób omówiony wyżej, przyjmiemy, że hyperprzestrzeń fizyczna odniesiona została do jakiegoś normalnego układu spółrzędnych (X), spełniającego warunki twierdzenia, podanego przed chwilą. Oznaczywszy na ciele (S) jakiś trójkąt geodetyczny, można będzie, posługując się jednostką długości i goniometrem w zwykły sposób, zmierzyć boki i kąty rzeczonego trójkąta. Dokonawszy tych pomiarów, można będzie, na podstawie dobrze znanego wzoru, wyznaczyć wartość Γ krzywizny przestrzeni, odpowiadającej układowi spółrzędnych (X). Poznawszy liczbę Γ, łatwo już będzie określić w zupełności układ spółrzędnych x_1, x_2, x_3, do którego przestrzeń, odpowiadająca układowi (X), będzie miała być odniesioną. Po wykonaniu wszystkich omówionych czynności można już będzie, posługując się jednostką długości i goniometrem, dokonywać pomiarów przestrzennych spółrzędnych punktów fizycznych, przynajmniej takich, których przestrzenne spółrzędne nie ulegają zbyt gwałtownym zmianom i nie wychodzą poza pewne granice.

Żeby jednak załatwić w zupełności sprawę pomiarów spółrzędnych punktów fizycznych należy jeszcze spełnić warunki aksjomatu (A) odnośnie do zegara. Oczywistą jest rzeczą, że do tego koniecznie potrzeba przyjąć nowe postulaty. Pominiemy jednak ten przedmiot, bo sądzimy, że wyjaśnienia już podane wystarczają do zrozumienia, przynajmniej w ogólnych zarysach, w jaki sposób nierelatywistyczna fizyka spełnia warunki aksjomatu (A) kiedy chodzi o pomiary spółrzędnych punktu fizycznego. Zaznaczymy tylko, że zależnie od tego czy wyniki pomiarów zgadzałyby się z wynikami rachunków czy też im przeczyły, należałoby oświadczyć, że doświadczenie potwierdza kompleks przyjętych postulatów, albo poucza, że nie wszystkie te postulaty są słuszne.

Powyższe rozważenia potwierdzają, co na podstawie aksjomatu (A) z góry było do przewidzenia, a mianowicie, że żadna z obu omawianych w tej pracy koncepcji hyperprzestrzeni fizycznej nie zawiera dostatecznych podstaw do wykonywania pomiarów spółrzędnych punktów fizycznych; w każdym z tych przypadków nie-

odzownie potrzeba jeszcze przyjąć jakieś dodatkowe postulaty, dotyczące realnych układów punktów fizycznych. Stwierdziliśmy, że w fizyce nierelatywistycznej, postulat (H) jest właśnie takim dodatkowym postulatem; wprawdzie postulat ten niezupełnie wystarcza, ale umożliwia częściowe przynajmniej dopięcie celu.

§ 6. Zbadajmy teraz w jaki sposób relatywiści, pragnąc poddać teorję względności kontroli eksperymentalnej, przypisują liczbowe wartości spółrzędnym pewnych punktów fizycznych.

O ile wiemy nie uczyniono jeszcze nawet żadnej próby spełnienia obu warunków aksjomatu (A) (str. 15) odnośnie do ogólnej teorji względności.

Wprawdzie p Hilbert[1]) określa dwa narzędzia miernicze, z których jednemu nadaje nazwę *nitki mierniczej* (*Massfaden*), a drugiemu *zegara świetlnego* (*Lichtuhr*), i temsamem spełnia pierwszy warunek aksjomatu (A) (str. 15), bo rzeczone narzędzia, gdyby istniały, mogłyby służyć do mierzenia spółrzędnych punktu fizycznego, ale nie podaje *żadnej* wskazówki, odnośnie do przybliżonej przynajmniej realizacji tych narzędzi i nie spełnia zatem drugiego warunku wspomnianego aksjomatu. Pozwolę sobie dodać, że wypełnienie tej luki w teorji p. Hilberta wydaje się mnie rzeczą nadzwyczajnie trudną.

Wobec takiego stanu rzeczy ogólna teorja względności w obecnym swoim stanie oczywiście nie może uledz żadnej kontroli eksperymentalnej. W jakiż więc sposób dochodzą relatywiści do wyniku przeciwnego? Na potwierdzenie ogólnej teorji względności relatywiści cytują tylko parę faktów z zakresu astronomji i zużytkowują te fakta dla swoich celów w sposób następujący: stwierdziwszy, że na podstawie hypotez, przez nich przyjętych, istnieje taki układ spółrzędnych punktu hyperprzestrzeni fizycznej, że w tym układzie forma metryczna hyperprzestrzeni fizycznej przybiera pewien szczególny kształt[2]), identyfikują oni trzy ze spółrzędnych punktu fizycznego, jużto ze zwykłemi spółrzędnemi prostokątnemi Kartezjusza, jużto ze spółrzędnemi biegunowemi, uważając zarazem czwartą spółrzędną za czas, mierzony zapomocą zwykłego zegara

---

[1]) Hilbert. Die Grundlagen der Physik. (Zweite Mitteilung), *Göttinger Nachrichten*, 1917 Heft 1, p. 54 i dalsze.

[2]) Patrz w szczególności: Hilbert, die Grundlagen der Physik (Zweite Mitteilung); *Göttinger Nachrichten*, 1917, p. 67 i dalsze oraz Weyl, *Raum-Zeit. Materie.* Berlin, Springer 1921 §§ 29, 30, 31, 32.

i, nie uczyniwszy nawet żadnej próby usprawiedliwienia takich identyfikacyj, podają fakt zgodności, uzyskanych przez siebie, związków pomiędzy rozważanemi spółrzędnemi pewnego punktu fizycznego, z wynikami pomiarów. dokonanych metodami fizyki nierelatywistycznej, za eksperymentalne potwierdzenie teorji względności.

Oczywistą jest rzeczą. że zachodzi jedno z dwojga: albo teza, iż fakta stwierdzone przez pomiary spółrzędnych punktów fizycznych, potwierdzają ogólną teorję względności, jest sądem całkiem gołosłownym, na niczem nie opartym, albo rzeczona teza opiera się jednocześnie i na przesłankach teorji względności i na przesłankach nierelatywistycznej koncepcji hyperprzestrzeni fizycznej.

Ale stwierdzamy z największą łatwością opierając się na postulatach XII (str. 8) i XII a (str. 12), że rzeczone dwa układy przesłanek są sprzeczne pomiędzy sobą. Zważywszy, iż opierając się na przesłankach sprzecznych można udowodnić wedle upodobania, że dowolnie naprzód dana teza jest słuszna albo błędna [1]), stwierdzamy ostatecznie, że teza relatywistów, głosząca zgodę pomiędzy ogólną teorją względności a faktami stwierdzonemi doświadczalnie, jest, jak już przewidzieliśmy z góry, sądem najzupełniej bezpodstawnym.

Niektóre najnowsze prace potwierdzają w sposób bardzo godny uwagi powyższy wynik.

Prof. Le Roux [2]) stwierdza sprzeczność pomiędzy interpretacją fizyczną, w relatywistycznej teorji Merkurego, pewnego jednego symbolu, występującego w tej teorji, a interpretacją pewnego drugiego symbolu, występującego również w tejże teorji. Z drugiej zaś strony prof. Painlevé [3]) stwierdza słusznie, że teorja względności dopuszcza nie jedno tylko rozwiązanie zagadnienia o ruchu Merkurego, lecz nieskończenie wiele różnych rozwiązań rzeczonego zagadnienia.

Sprzeczności i wieloznaczności powyższego rodzaju oczywiście niczem innem nie są spowodowane, jak tylko brakiem wszelkich podstaw do fizycznej interpretacji symbolów ogólnej teorji względno-

---

[1]) Jean Sleszyński, Sur le raisonnement dans les Sciences déductives. Rozprawy Polskiego Towarzystwa Matematycznego, t. I, 1921, p. 102.

[2]) Le Roux. La loi de Gravitation et ses conséquences. C. R. de l'Académie des Sciences de Paris, 13 Juin 1921, p. 1467.

[3]) Painlevé, La Mécanique classique et la théorie de la relativité, ibid. 24 Octobre 1921, p. 677. Patrz także: Hilbert, Die Grundlagen der Physik (Zweite Mitteilug), *Göttinger Nachrichten* Heft 1, p. 67 i dalsze.

ści, brakiem stąd pochodzącym, że nie zdołano spełnić obu warunków aksjomatu (A) (str. 15), w sposób zgodny z przesłankami powyższej teorji.

§ 7. Zwróćmy się teraz do małej teorji względności. Jest to szczególny przypadek ogólnej teorji względności, w którym przyjmuje się, że prócz postulatów ogólnej teorji zachodzą jeszcze dwa następujące:

Postulat I. Cała hyperprzestrzeń fizyczna stanowi jedną regularną dziedzinę {postulat XII, str. 8} elementarną, a pośród różnych normalnych układów spółrzędnych, do których ta dziedzina, a więc cała hyperprzestrzeń fizyczna, może być odniesioną, istnieją układy spółrzędnych, którym damy nazwę układów Einsteina, a których własności charakterystyczne są następujące:

1⁰ Odnośny obraz arytmetyczny hyperprzestrzeni fizycznej zlewa się z całą przestrzenią arytmetyczną czwórwymiarową.

2⁰ Jeżeli w jakimś układzie spółrzędnych Einsteina symbol t oznacza czas, a x_1, x_2, x_3 trzy pozostałe spółrzędne punktu hyperprzestrzeni fizycznej, to wyrażenie

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dt^2$$

przedstawia odnośną formę metryczną hyperprzestrzeni fizycznej

Postulat II.[1] Jeżeli, przy zachowaniu powyższych oznaczeń, spółrzędne Einsteina x_1, x_2, x_3, t jakiegoś zjawiska, albo jakiegoś punktu fizycznego, spełniają równania

$$x_i = f_i(t), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

to w takim razie mamy:

$$\sum_{i=1}^{3} \{f_i(t) - f_i(\sigma)\}^2 \leqq (t - \sigma)^2$$

przy wszystkich układach wartości t i σ.

Zbadajmy najpierw w jaki sposób tłómaczą rzekomo relatywiści sławne doświadczenia pp. Michelsona i Morleya zapomocą małej teorji względności.

Przy wykonywaniu tych doświadczeń autorowie tychże stali na stanowisku tradycyjnej, a więc nierelatywistycznej koncepcji hyperprzestrzeni fizycznej, a ze stanowiska tej koncepcji wyniki rzeczonych doświadczeń można sformułować jak następuje:

---

[1]) Możnaby dowieść, że ten postulat wynika z postulatu XI i reszty poprzednio przyjętych postulatów, przynajmniej o ile chodzi o punkt fizyczny.

(*α*) *Jeżeli jakiś punkt fizyczny świecący jest sztywnie związany z ziemią, to światło, wysyłane przez ten punkt, rozchodzi się we wszystkich kierunkach z tą samą prędkością względem ziemi.*

Powyższa teza jest zdaniem warunkowem, którego poprzednik brzmi jak następuje:

(*β*) *Jakiś punkt fizyczny świecący jest sztywnie związany z ziemią.*

Z tego wynika, że zjawisko, do którego odnosi się teza (*α*), może się odbywać tylko w przypadku, kiedy jakiś punkt fizyczny świecący sprawdza zdanie (*β*). Ale jeden z zapalonych relatywistów, p. Laue, twierdzi, że mała teorja względności wyklucza istnienie ciał sztywnych[1]). Okoliczność ta wprawia nas w niemały kłopot; jeżeli bowiem p. Laue ma rację, to żaden punkt fizyczny nie może sprawdzać zdania (*β*), zatem zjawisko, rozważane w tezie (*α*), jest niemożliwe i nie może zatem być mowy o tłómaczeniu tego zjawiska ze stanowiska teorji względności. W rzeczywistości jednak p. Laue wykazuje tylko[2]), że teorja względności wyklucza jedynie ciała sztywne, spełniające pewną definicję, tę mianowicie, którą on właśnie rozważał. Wobec tego kwestja sformułowania definicji ciała sztywnego, zgodnej z zasadami małej teorji względności czyli sprawa interpretacji tezy (*α*) w myśl zasad rzeczonej teorji, pozostaje otwartą. W rzeczywistości poczyniono kilka prób w tym kierunku, ale wystarczy, żebyśmy zbadali ostatnią z nich, uczynioną przez p. Weyla[3]), bo ze wszystkiemi innemi relatywiści sami już się rozprawili.

§ 8. Zanim przystąpimy do dyskusji definicji p. Weyla, usiłujemy najpierw uwidocznić trudności, z jakiemi połączone jest podanie definicji ciała sztywnego, dopuszczalnej ze stanowiska małej teorji względności, Sądzimy, że celu tego najlepiej dopniemy przez zbadanie pewnej definicji, którą zdaje się nikt wyraźnie nie podał, ale która tak naturalnie nastręcza się uwadze, że ją, jak się nam zdaje, relatywiści, a między innemi i sam p. Laue, często nieświadomie przyjmują.

---

[1]) M. Laue. *Das Relativitätsprincip*, Fridr. Vieveg & Sohn, Braunschweig, 1914, p. 50.

[2]) Soc. cit. § 27, p. 180.

[3]) H. Weyl. *Raum Zeit Gravitation*. Berlin, Julius Springer, 1918, p. 159; radzimy jednak przeczytać cały § 21 od str. 152 do str. 161.

W celu skrócenia wyróżniać będziemy tę ze spółrzędnych Einsteina punktu hyperprzestrzeni fizycznej, która przedstawiać będzie czas, przez to, że przy wyszczególnianiu spółrzędnych, wymieniać ją będziemy na 4-tem miejscu; te ze spółrzędnych Einsteina, z których żadna czasu nie przedstawia, nazywać będziemy *przestrzennemi* spółrzędnemi odnośnego punktu.

Założywszy, żeśmy hyperprzestrzeń fizyczną odnieśli do jakiegoś układu spółrzędnych Einsteina x_1, x_2, x_3, t, któryto układ oznaczać będziemy krócej przez (X), uważajmy dwa punkty fizyczne A i B i oznaczmy odpowiednio przez a_1, a_2, a_3 i b_1, b_2, b_3 spółrzędne przestrzenne tych punktów w takim przypadku, kiedy spółrzędna, oznaczające czas ma tę samą wartość t_0 dla obu punktów A i B. Przy tych warunkach nadawać będziemy liczbie r, określonej przez związki

$$r^2 = \sum_{i=1}^{3} (b_i - a_i)^2 ; \qquad r \geqq 0,$$

nazwę *odległości* punktów A i B *szacowanej* w układzie (X) i odpowiadającej chwili $t = t_0$, t. j. w chwili określonej przez wartość t_0 zmiennej t, przedstawiającej czas w układzie spółrzędnych (X). Po tych przygotowaniach, formułujemy definicję ciała sztywnego, którą mieliśmy na myśli, jak następuje:

(A) Definicja. Orzeczenie, że jakiś układ (S) punktów fizycznych jest sztywny czyli stanowi ciało sztywne wyraża, że odległości wzajemne punktów fizycznych, należących do układu (S) mogą wprawdzie zależeć od wyboru układu spółrzędnych Einsteina, w którym są szacowane, ale, po dokonaniu wyboru takiego układu spółrzędnych, zachowują one wartości niezależne od chwili, której odpowiadają.

(B) Twierdzenie. Jeżeli jakiś układ punktów fizycznych (S) składa się przynajmniej z dwóch różnych punktów fizycznych i stanowi w myśl definicji (A) ciało sztywne jeżeli nadto w jakimś układzie spółrzędnych Einsteina spółrzędne przestrzenne każdego punktu fizycznego, należącego do ciała (S) posiadają pochodne rządu pierwszego ciągłe względem spółrzędnej, przedstawiającej odnośny czas, to każdemu układowi spółrzędnych Einsteina (X) punktu hyperprzestrzeni fizycznej odpowiada taki układ trzech liczb stałych v_1, v_2, v_3, że spółrzędne x_1, x_2, x_3, t dowolnego punktu fizycznego M, należącego do układu (S), spełniają równania postaci

$$x_i = v_i t + a_i^{(M)} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gdzie symbole $a_i^{(M)}$ $(i = 1, 2, 3)$ są liczby stałe, których wartości zależą tylko od wyboru punktu fizycznego M w obrębie układu (S).

Twierdzenie powyższe wysławiamy krótko jak następuje: jeżeli jakiś układ (S) punktów fizycznych zawiera przynajmniej dwa punkty i jest, w myśl definicji (A), ciałem sztywnym, to po odniesieniu hyperprzestrzeni fizycznej do jakiegoś układu spółrzędnych Einsteina (X), zawsze zajdzie jedno z dwojga: albo ciało (S) poruszać się będzie względem układu (X) ruchem translacyjnym prostolinjowym jednostajnym, albo (co odpowiada przypadkowi, w którym $v_1 = v_2 = v_3 = 0$) pozostawać będzie względem układu (X) w spokoju.

Żeby twierdzenie (B) uzasadnić, przyjmijmy, że założenia tego twierdzenia są spełnione, odnieśmy hyperprzestrzeń fizyczną do takiego układu spółrzędnych Einsteina (X), żeby w tym układzie spółrzędne przestrzenne każdego punktu fizycznego ciała (S) miały pochodne rzędu pierwszego ciągłe względem czwartej spółrzędnej, przedstawiającej czas, i weźmy pod uwagę dwa różne punkty fizyczne A i B, należące do ciała sztywnego (S). Spółrzędne $x_1^{(A)}, x_2^{(A)}, x_3^{(A)}, t$ punktu A i spółrzędne $x_1^{(B)}, x_2^{(B)}, x_3^{(B)}, t$ punktu B spełniać będą równania postaci

(1) $$x_i^{(A)} = f_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(2) $$x_1^{(B)} = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gdzie funkcje zmiennej t, występujące w prawych stronach tych równań są jednowartościowemi i ciągłemi funkcjami zmiennej t, określonemi przy wszystkich wartościach tej zmiennej i takiemi, że każda z nich ma pochodną ciągłą przy wszystkich wartościach na t. Na podstawie postulatu II str. 24 mamy:

(3) $$\sum_{i=1}^{3} (f_i'(t))^2 \leqq 1,$$

(4) $$\sum_{i=1}^{3} (\varphi_i'(t))^2 \leqq 1,$$

przy wszystkich wartościach zmiennej t.

Oznaczywszy ogólnie przez x_1, x_2, x_3, t spółrzędne punktu hyperprzestrzeni fizycznej w układzie (X), oznaczmy przez y_1, y_2, y_3 τ

spółrzędne tegoż punktu w jakimś drugim układzie spółrzędnych Einsteina (Y). Ogólna postać związków, zachodzących pomiędzy zmiennemi x_1, x_2, x_3, t a zmiennemi y_1, y_2, y_3, τ, określoną jest przez to, że ze względu na postulat I str. 24 i postulat XII str. 8, omawiane związki pociągają za sobą równość

(5) $$\sum_{i=1}^{3} dx_i^2 - dt^2 = \sum_{i=1}^{3} dy_i^2 - d\tau^2.$$

Opierając się na tej uwadze i na znanych własnościach form różniczkowych kwadratowych, z łatwością stwierdzamy, że związki, o które chodzi, są postaci następującej:

(6) $$\left| \begin{array}{l} y_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k + a_{i4} t + a_i, \\ \tau = \sum_{k=1}^{3} a_{4k} x_k + a_{44} t + a_4 \end{array} \right.$$

gdzie a_{ij} i a_i są liczby stałe, z których pierwsze spełniają równania następujące:

(7) $$\left| \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{3} a_{ik}^2 - a_{4k}^2 = 1 & (k = 1, 2, 3) \\ \sum_{i=1}^{3} a_{i4}^2 - a_{44}^2 = -1 & \\ \sum_{i=1}^{3} a_{ik} a_{ij} - a_{4k} a_{4j} = 0 & (k \neq j, k, j = 1, 2, 3, 4) \end{array} \right.$$

Należy jeszcze dodać, że ze względu na postulat XI (str. 7), mamy

(8) $$a_{44} > 0.$$

Z łatwością udowodnić można twierdzenie następujące:

(C) Twierdzenie. Jeżeli stałe a_{ij}, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ spełniają związki (7) i (8), a stałe a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ mają wartości jakiekolwiek, to wzory (6) określają układ zmiennych y_1, y_2, y_3, τ jako jakiś nowy układ (Y) spółrzędnych Einsteina i przedstawiają związki,

zachodzące pomiędzy spółrzędnemi punktu hyperprzestrzeni w układzie Einsteina (X), a spółrzędnemi tegoż punktu w układzie Einsteina (Y).

Pośród różnych równań, będących następstwami równań (7), istnieje w szczególności i równanie następujące:

$$(9) \qquad -\sum_{k=1}^{3} a_{4k}^2 + a_{44}^2 = 1.$$

Łatwo można dowieść, że każdemu układowi wartości (naturalnie rzeczywistych) na liczby

$$(10) \qquad a_{41}, a_{42}, a_{43}, \text{ i } a_{44},$$

spełniającemu równanie (8) można przyporządkować nieskończenie wiele takich układów wartości na zespół wszystkich innych spółczynników, występujących we wzorach (6), żeby przy każdym z nich układ równań (7) był spełniony. Stąd zaś wynika bezpośrednio twierdzenia następujące:

(D) Twierdzenie. Każdemu układowi wartości na liczby (10), spełniającemu związki (8) i (9) odpowiada nieskończenie wiele układów spółrzędnych Einsteina w taki sposób, że jeśli którykolwiek z tych ostatnich oznaczymy przez (X), to po stosownem oznaczeniu innych spółczynników, występujących we wzorach (6), wzory te przedstawiać będą wzory na przejście od układu spółrzędnych (X) do układu (Y).

(E) Twierdzenie. Jeżeli każda z trzech funkcji

$$\Phi_1(t),\ \Phi_2(t),\ \Phi_3(t)$$

zmiennej t określoną jest jako funkcja jednowartościowa tej zmiennej przy wszystkich jej wartościach i posiada pochodną ciągłą rzędu pierwszego w obrębie wszystkich wartości rozważonej zmiennej, jeżeli nadto mamy

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{3} (\Phi_i'(t))^2 \leqq 1$$

i przyjmiemy

$$(12) \qquad \tau = \sum_{k=1}^{3} a_{4k}\, \Phi_k(t) + a_{44} t + a_4,$$

zakładając przytem, że związki (8) i (9) są spełnione, a a_4 przedstawia dowolną stałą, to w takim razie każda ze zmiennych t i τ jest taką funkcją drugiej z nich, że jej pochodna jest ciągłą i dodatnią przy wszystkich wartościach tej zmiennej.

Z elementów teorji funkcji zmiennej rzeczywistej wynika, że wystarczy wykazać, iż zmienna τ, uważana za funkcję zmiennej t, określoną przez wzór (11) ma ciągłą pochodną, posiadającą stałą dolną granicę dodatnią.

Otóż ze wzoru (12) mamy:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sum_{k=1}^{3} a_{4k}\,\Phi'_k(t) + a_{44} \tag{13}$$

Zatem pochodna $\frac{d\tau}{dt}$ jest funkcją jednowartościową i ciągłą zmiennej t, określoną przy wszystkich wartościach tej zmiennej. Ale

$$\left(\sum_{k=1}^{3} a_{4k}\,\Phi_k(t)\right)^2 \leqq \left|\sum_{k=1}^{3} a_{4k}^2\right| \left|\sum_{k=1}^{3} (\Phi'_k(t))^2\right|$$

Zatem, na podstawie (9) i (11) mamy

$$\left(\sum_{k=1}^{3} a_{4k}\,\Phi'_k(t)\right)^2 \leqq a_{44}^2 - 1$$

Opierając się na tym związku i na nierówności (8), wnosimy ze wzoru (13), że przy wszystkich wartościach na t mamy

$$\frac{d\tau}{dt} \geqq a_{44} - \sqrt{a_{44}^2 - 1}$$

Zatem funkcja $\frac{d\tau}{dt}$ posiada stałą dolną granicę dodatnią, a to tylko pozostawało do wykazania, żeby nasze twierdzenie uzasadnić w zupełności.

Założywszy, że wzory (6) określają układ zmiennych

$$y_1, y_2, y_3, \tau$$

jako jakiś układ spółrzędnych Einsteina (Y) punktu hyperprzestrzeni fizycznej, zwróćmy się do wywodu związków, wyrażających, że odległość punktów fizycznych A i B, szacowana w układzie (Y), nie zależy od chwili, której w tym układzie odpowiada. Na pod-

stawie wzorów (1) i (6) mamy na spółrzędne przestrzenne $y_i^{(A)}$ $(i = 1, 2, 3)$ punktu A w układzie (Y) wzory następujące:

$$(14) \qquad y_i^{(A)} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} f_k(t) + a_{i4} t + a_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

a nadto, z tychże wzorów (1) i (6) wynika, że czwarta spółrzędna punktu A, τ, przedstawiająca czas w układzie (Y), określona będzie przez wzór:

$$(15) \qquad \tau = \sum_{k=1}^{3} a_{4k} f_k(t) + a_{44} t + a_4$$

Zwróćmy się teraz do wyznaczenia spółrzędnych przestrzennych $y_i^{(B)}$ $(i = 1, 2, 3)$ punktu fizycznego B w układzie (Y) w przypadku, kiedy czwarta spółrzędna tego punktu, przedstawiająca czas w układzie (Y), ma wartość τ, określoną przez wzór (15). Jeżeli przy tych warunkach weźmiemy pod uwagę spółrzędne punktu fizycznego B w układzie (X), to spółrzędna przedstawiająca czas niekoniecznie będzie miała wartość t; wobec tego oznaczymy wartość rzeczonej spółrzędnej przez wyrażenie

$$t + h.$$

Na podstawie wzorów (2) i (6) wielkość h spełniać będzie równanie

$$(16) \qquad \tau = \sum_{k=1}^{3} a_{4k}\, \varphi_k(t+h) + a_{44}(t+h) + a_4$$

Opierając się na tw. (E) upewniamy się z łatwością, że zespół równań (15) i (16) określa sumę

$$t + h$$

jako funkcję zmiennej t, posiadającą, przy wszystkich wartościach tej zmiennej, pochodną ciągłą dodatnią. Zatem, rozważane dwa równania określają zmienną h jako funkcją jednowartościową o pochodnej ciągłej zmiennej t przy wszystkich wartościach tej zmiennej. Ale, o ile chodzi o określenie zmiennej h jako funkcję zmiennej t, zespół równań (15) i (16) jest równoważny jedynemu równaniu następującemu:

$$(17)\qquad \sum_{k=1}^{3} a_{4k}\{\varphi_k(t+h) - f_k(t)\} + a_{44}h = 0.$$

Dochodzimy więc do wyniku następującego: równanie (17) określa zmienną h jako funkcję jednowartościową zmiennej t posiadającą pochodną ciągłą przy wszystkich wartościach na t, a jeżeli weźmiemy punkt fizyczny B pod uwagę wówczas, kiedy w układzie (X) ta spółrzędna rozważanego punktu fizycznego, która przedstawia czas ma wartość

$$t+h,$$

to w takim razie ta spółrzędna punktu fizycznego B, która przedstawia czas w układzie (Y) mieć będzie wartość τ, określoną przez wzór (15). Opierając się na tym wyniku oraz na równaniach (2) i (6) stwierdzamy, że na spółrzędne przestrzenne $y_i^{(B)}$ $(i=1,2,3)$ punktu fizycznego B w układzie (Y) przy tej wartości τ czasu, odpowiadającego układowi (Y), która określona jest przez wzór (15), zachodzą wzory następujące

$$(18)\qquad y_i^{(B)} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,\varphi_i(t+h) + a_{i4}(t+h), \qquad (i=1,2,3),$$

gdzie h jest funkcją zmiennej t, określoną przez równanie (17).

Ponieważ spółrzędne przestrzenne

$$y_i^{(A)},\ (i=1,2,3) \quad \text{i} \quad y_i^{(B)},\ (i=1,2,3)$$

odpowiednio punktów fizycznych A i B w układzie (Y) odpowiadają tej samej wartości τ czasu, odpowiadającego układowi (Y), przeto, na podstawie definicji (A) (str. 26), mamy

$$(19)\qquad \sum_{i=1}^{3}\{y_i^{(B)} - y_i^{(A)}\}^2 = \text{Const.} > 0.$$

Opierając się na równaniach (7) łatwo stwierdzamy, że z równań (14), (15), (16) i (18) wynika równość następująca:

$$\sum_{i=1}^{3}\{y_i^{(B)} - y_i^{(A)}\}^2 = \sum_{i=1}^{3}\{\varphi_i(t+h) - f_i(t)\}^2 - h^2$$

Zatem, z uwagi na (19), mamy:

(20) $$\sum_{i=1}^{3}\{\varphi_i(t+h)-f_i(t)\}^2-h^2=\text{Cont.}>0.$$

Ostatecznie więc, równanie (17) pociąga za sobą związki (20). Ale, ze względu na definicję (A), str. 26, i na twierdzenie (D), str. 29, swoboda wyboru spółczynników a_{4k} $(k=1,2,3,4)$ ograniczoną jest tylko przez warunki (8) i (9).

Jeżeli więc przyjmiemy

(21) $$u_k=\frac{a_{4k}}{a_{44}} \qquad (k=1,2,3)$$

to będziemy mogli zadać sobie jakiekolwiek wartości na liczby u_k, byleby te wartości spełniały nierówność:

(22) $$\sum_{\alpha=1}^{3}u_k^2<1.$$

Z drugiej znów strony ze wzorów (21) wynika, że równanie (17) równoważne jest następującemu:

(23) $$\sum_{i=1}^{3}u_i\{\varphi_i(t+h)-f_i(t)\}+h=0.$$

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

(F). **Twierdzenie.** Jeżeli w układzie (X) spółrzędne dwóch różnych punktów fizycznych A i B ciała sztywnego (s) spełniają odpowiednio równania (1) i (2), to równanie (23) pociąga za sobą związki (20) przy każdym, byle nierówność (22) spełniającym układzie wartości na liczby u_1, u_2, u_3.

Oznaczywszy przez h' pochodnę funkcji h zmiennej t, otrzymamy, drogą różniczkowania równań (20) i (23) równania następujące:

(24) $$\sum_{i=1}^{3}\{\varphi_i(t+h)-f_i(t)\}\{\varphi_i'(t+h)[1+h']-f_i'(t)\}-hh'=0,$$

(25) $$\sum_{i=1}^{3}u_i\{\varphi_i'(t+h)[1+h']-f_i'(t)\}+h'=0.$$

(G). **Lemat.** Jeżeli przy jakimś układzie wartości na liczby

$$u_1, u_2, u_3,$$

spełniającym nierówność (22), funkcje h i h' zmiennej t przybierają przy jakiejś wartości $t = t_0$ na t odpowiednio jakieś wartości h_0 i h'_0, to w takim razie mamy:

$$\varphi'_i(t_0 + h_0) - f'_i(t_0) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{27}$$

oraz

$$h'_0 = 0. \tag{28}$$

Żeby powyższy lemat uzasadnić, zważmy, iż przy $t = t_0$, zespół równań (23) i (25) przybiera postać układu następującego.

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3} u_i \{\varphi_i(t_0 + h_0) - f_i(t_0)\} + h_0 = 0 \\ &\sum_{i=1}^{3} u_i \{\varphi'_i(t_0 + h_0)[1 + h'_0] - f'_i(t_0)\} + h'_0 = 0. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Jeżeli układ (29) uważać będziemy za układ równań o niewiadomych u_1, u_2, u_3, to będzie to układ równań liniowych, a ze znaczenia, nadanego symbolom h_0 i h'_0 wynika, że układ ten nie będzie pozbawiony rozwiązań, spełniających (22). Z drugiej zaś strony z tego, że związki (20) zachodzą przy każdej wartości na t, wnosimy, że nie każda z różnic

$$\varphi_i(t_0 + h_0) - f_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

równa się zeru. Zatem jedno z dwojga: albo układ (29), uważany za układ równań o niewiadomych u_1, u_2, u_3, jest równoważny pierwszemu równaniu tego układu, albo macierz spółczynników tych równań liniowych jest rzędu 2. W pierwszym przypadku znajdzie się taka liczba λ, że mieć będziemy:

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi'_i(t_0 + h_0)[1 + h'_0] - f'_i(t_0) = \lambda\{\varphi_i(t_0 + h_0) - f_i(t_0)\}, (i = 1, 2, 3) \\ &h'_0 = \lambda h_0. \end{aligned}\right. \tag{30}$$

Jeżeli zapomocą tych równań wyrugujemy wyrażenia, stanowiące lewy strony tychże, z równania jakie wynika z równania (24)

w przypadku, w którym $t = t_0$ i w którym zatem mamy $h = h_0$ i $h' = h'_0$, to otrzymamy równanie:

$$\lambda \left| \sum_{i=1}^{3} \{\varphi_i(t_0 + h_0) - f_i(t_0)\}^2 - h_0^2 \right| = 0.$$

Ponieważ zaś (20) zachodzi w szczególności i przy $t = t_0$ oraz $h = h_0$, przeto z powyższego równania mamy $\lambda = 0$. Z tego zaś wnosimy, opierając się na równaniach (30), że w rozważanym przypadku lemat nasz się sprawdza.

Niech teraz macież spółczynników równań (29) będzie rzędu 2. Zważywszy, że na podstawie definicji liczb h_0 i h'_0, równania te posiadają jakieś rozwiązanie, spełniające nierówność (22), łatwo stwierdzamy, że znajdzie się taka liczba dodatnia δ, że nierówności

(31) $$|l = h_0| < \delta, \quad |l' - h_0| < \delta$$

stanowić będą wystarczające warunki, aby równania, w jakie przeobrażają się równania (29) przez podstawienie liczb l i l' odpowiednio w miejsce liczb h_0 i h'_0, posiadały, względem niewiadomych u_1, u_2, u_3, rozwiązanie, spełniające nierówność (22). Z tego wynika, że przy rozważanych warunkach i w razie kiedy liczby l i l' spełniają (31), można będzie tak rozporządzić liczbami u_1, u_2, u_3, ażebyśmy mieli

(32) $$(h)_{t=t_0} = l, \quad (h')_{t=t_0} = l'$$

Zważywszy teraz, że (23) pociąga za sobą (20), zważywszy nadto, że zatem zespół równań (23) i (25) pociąga za sobą (24) przy każdej wartości na t, wnosimy ze związków (32), że mieć będziemy

(33) $$\sum_{i=1}^{3} \{\varphi_i(t_0 + l) - f_i(t_0)\} \{\varphi'_i(t_0 + l)[1 + l'] - f'_i(t_0)\} - ll' = 0.$$

Ale przy danym t_0, swoboda wyboru liczb l i l' ograniczona jest tylko przez nierówności (31). Zatem nierówności te pociągają za sobą (33). Ponieważ zaś równanie to jest liniowe względem l', a przy stałym l, liczba l' może być dowolnie wybrana w granicach, oznaczonych przez drugą z nierówności (31), przeto mamy z osobna

$$\sum_{i=1}^{3} \{\varphi_i(t_0 + l) - f_i(t_0)\} \{\varphi'_i(t_0 + l) - f_i(t_0)\} = 0.$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{3} \{\varphi_i(t_0 + l) - f_i(t_0)\} \varphi_i'(t_0 + l) - l = 0.$$

Odejmując stronami pierwsze z tych równań od drugiego, otrzymujemy:

$$(34)\qquad \sum_{i=1}^{3} \{\varphi_i(t_0 + l) - f_i(t_0)\} f_i'(t_0) - l = 0.$$

Ponieważ równanie to zachodzi przy wszystkich wartościach na l, spełniających pierwszą z nierówności (31), przeto, przy tychże wartościach na l zachodzić będzie i równie wyrażające, że pochodna cząstkowa lewej strony równania (34) względem l równa się zeru. Mamy więc:

$$(35)\qquad \sum_{i=1}^{3} \varphi_i'(t_0 + l) f_i'(t_0) - 1 = 0.$$

Ponieważ zaś do wartości na l, przy których to równanie zachodzi, należy w szczególności i wartość $l = h_0$. przeto mamy

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i'(t_0 + h_0) f_i'(t_0) = 1.$$

Ponieważ zaś związki (3) i (4) zachodzą przy każdej wartości na t, przeto mamy w szczególności

$$\sum_{i=1}^{3} (f_i'(t_0))^2 \leqq 1$$

$$(35\text{ a})\qquad \sum_{i=1}^{3} (\varphi_i'(t_0 + h_0))^2 \leqq 1.$$

Ale z tych związków i z równości (35) wynika, że wyrażenie

$$\sum_{i=1}^{3} \{\varphi_i(t_0 + h_0) - f_i(t_0)\}^2$$

nie może mieć wartości dodatniej. Ponieważ z drugiej strony rzeczone wyrażenie nie może też mieć i wartości ujemnej, przeto, roz-

ważane wyrażenie równa się zeru, a stąd wynika, że równości (27) są spełnione. Ale równości (27) i drugie z równań (29) pociągają za sobą, ze względu na (22) i (35a) równość (28). Okazuje się więc, jednocześnie, że macież spółczynników równań (29) nie może w rzeczywistości być rzędu 2, a lemat nasz zachodzi w podanem brzmieniu.

(H). **Lemat.** Dowolnie danej wartości t_0 na t można przyporządkować taką od zera większą liczbę r, że nierówność

$$|h_0| < r \tag{36}$$

stanowić będzie dostateczny warunek do tego. żeby istniał taki układ wartości na liczby u_1, u_2, u_3, spełniający (22), iżby funkcja h zmiennej t, określona przez równanie (23) spełniała warunek

$$(h)_{t=t_0} = h_0 .$$

Istotnie, żeby ten lemat uzasadnić, należy tylko dowieść, że przy dostatecznie małej, choć od zera większej wartości na r, pierwsze z równań (29) nie będzie sprzeczne z nierównością (22).

Otóż z definicji (A) (str. 26) wynika, że mamy

$$\sum_{i=1}^{3} \{\varphi_i(t) - f_i(t)\}^2 = \text{Const.} > 0$$

przy wszystkich wartościach na t. Zatem, w szczególności nie każda z różnic

$$\varphi_i(t_0) - f_i(t_0) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

równa się zeru. Opierając się na tej uwadze i na ciągłości funcji $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, łatwo stwierdzamy, że dodatnia wartość na r, spełniająca żądanie, wypowiedziane przed chwilą, rzeczywiście istnieje. Zatem nasz lemat zachodzi w podanem brzmieniu.

Z lematów (G) i (H) wynika. że dowolnie danej liczbie t_0 odpowiada pewna taka od zera większa liczba r, że (36), pociąga za sobą (27). Ponieważ przy danym t_0 (36) pociąga za sobą (27), przeto, w obrębie wartości na h_0, spełniających nierówność (36) wolno różniczkować równanie (27) względem h_0. Stwierdzamy w ten sposób, że (36) nietylko pociąga ze sobą (27). ale także i równość:

$$\varphi_i''(t_0 + h_0) = 0 . \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{37}$$

Ponieważ zaś w szczególności wartość zerowa w h_0 spełnia nierówność (36), przeto równości (27) i (37) zachodzą w szczególności i przy $h_0 = 0$. Mamy więc:

$$\varphi_i'(t_0) = f_i'(t_0) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

oraz

$$\varphi_i''(t_0) = 0.$$

Ale t_0 oznacza całkiem dowolnie przyjętą liczbę, zatem twierdzenie (B) (str. 26) zachodzi przynajmniej w odniesieniu do układu spółrzędnych Einsteina (*X*). Z tego jednak wynika, na podstawie wzorów (6), że rzeczone twierdzenie sprawdza się w odniesieniu do każdego układu spółrzędnych Einsteina i zachodzi zatem w podanem brzmieniu.

Z twierdzenia (B) (str. 26) wynika, że definicja (A) (str. 26) nie może doprowadzić do określenia jakichś narzędzi mierniczych. Widzimy zarazem jak trudną byłoby rzeczą podanie takiej definicji ciała sztywnego, zgodnej z postulatami małej teorji względności, żeby ta definicja była przydatną do określenia jakichś narzędzi mierniczych.

§ 9. Przejdźmy teraz do zbadania pojęcia ciała sztywnego, naszkicowanego przez p. Weyla [1]). P. Weyl nie formułuje żadnej definicji ciała sztywnego, lecz przyjmuje, nie próbując nawet usprawiedliwić swoją hypotezę, że możliwą jest rzeczą taką podać definicję ciała sztywnego, ażeby definicja ta pociągała za sobą następującą okoliczność:

Jeżeli do jakiegoś ciała sztywnego (s) można dobrać taki układ (X) spółrzędnych Einsteina punktu hyperprzestrzeni fizycznej, żeby wartości bezwzględne pochodnych rzędu drugiego, względem czasu, spółrzędnych przestrzennych punktu fizycznego ciała (s) nie przekraczały pewnej skończonej granicy, to każdą razą, kiedy znajdzie się jakiś drugi układ spółrzędnych Einsteina (Y), w którymby spółrzędne przestrzenne punktów ciała (s) zachowywały, w obrębie pewnego okresu czasu (τ_1, τ_2), *wartości stałe, odległości wzajemne punktów fizycznych ciała (s), szacowane w układzie (Y) i odpowiadające chwilom, należącym do okresu* (τ_1, τ_2), *przybierają zawsze te same wartości.* Nadto p. Weyl zakłada, że ciała, pospolicie zwane stałemi, mogą być uwa-

---

[1]) Zob. odsyłacz na str. 25.

żane przynajmniej w pewnych warunkach, za realne obrazy, dostatecznie dokładne ciał sztywnych, w myśl definicji, spełniającej powyższy warunek. Zdaniem p. Weyla powyższe postulaty wystarczają do usprawiedliwienia kontroli małej teorji względności zapomocą pomiarów, dokonywanych w zwykły sposób.

Twierdzimy stanowczo, że tak nie jest. Istotnie, zwykłe pomiary długości zapomocą sztaby mierniczej, której jedna krawędź *AB* zaopatrzoną jest w podziałki, opierają się w sposób istotny w szczególności na założeniu, że do zupełnego oznaczenia położenia krawędzi *AB* wystarczy oznaczyć położenie jednego z jej punktów fizycznych i określić kierunek stycznej do krawędzi *AB* w tym punkcie. Czy sztaba miernicza sztywna, w znaczeniu rozważanym przez p. Weyla, będzie sprawdzać powyższe założenie? Zapytanie to dopuszcza tylko odpowiedź przeczącą, bo w przeciwnym razie pojęcie ciała sztywdego, rozważane przer p. Weyla, byłoby, jak to wynika z badań p. Lauego[1]) sprzeczne z postulatem II (str. 24) małej teorji wzglzdności. Ostatecznie więc okazuje się, że próba p. Weyla uczynienia zadość warunkom aksjomatu (A), (str. 15), celu chybiła.

Pozwolimy sobie dodać, że końcowy ustęp paragrafu, poświęconego przez p. Weyla temu przedmiotowi, dowodzi, że i sam autor w pewnej mierze uznaje, iż nie zdołał celu dopiąć.

§ 10. Z długiej dyskusji. której poświęciliśmy trzy poprzednie paragrafy, jasno wynika, że *mała teorja względności nietylko nie tłómaczy wyniku doświadczeń pp. Michelsona i Morleya, ale nie rozporządza nawet terminami, umonliwiającemi sformułowanie rzeczonego wyniku.* W rzeczywistości zachodzi ta sama okoliczność i w odniesieniu do każdego innego faktu doświadczalnego, potwierdzającego rzekomo małą teorję względności, bo żadnego z nich nie umiemy sformułować nie przyjąwszy uprzednio jakąś koncepcję ciała sztywnego, a nie znamy żadnej koncepcji tego przedmiotu, któraby nie przeczyła przesłankom teorji względności. Zatem uzasadniliśmy w zupełności wszystkie wyniki, zapowiedziane w § 1.

Na zakończenie pragnę jeszcze krótko wyjaśnić. z jakiego powodu sądzę, że oba zarzuty, podnoszone przez relatywistów prze-

---

[1]) M. Laue, Das Relativitätsprincip. Braunschweig, Fridr. Vieveg & Sohn 1913, p. 180.

ciwko nierelatywistycznej koncepcji fizyki, nie wydają mi się uzasadnionemi.

Według jednego z nich ujemny wynik doświadczeń, mających na celu stwierdzenie ruchu ziemi względem eteru, obalałby nierelatywistyczną koncepcję hyperprzestrzeni fizycznej. a według drugiego postulat mechaniki klasycznej, głoszący istnienie tej szczególnej klasy układów spółrzędnych, którym często nadawana bywa niestosowna nazwa układów nieruchomych, a którym damy miano układów Galileusza, doprowadzałby do przyjęcia jakiegoś niezrozumiałego absolutu.

Odnośnie do pierwszego zarzutu sądzimy, że doświadczenia obalają tylko hypotezę, według której jakiś eter, w którymby poruszające się ciała materjalne nie sprawiały żadnych zaburzeń, stanowiłby ośrodek, w którymby promienie świetlne, a więc perturbacje elektromagnetyczne, rozchodziły się, a bynajmniej nie przeczą tradycyjnej koncepcji hyperprzestrzeni fizycznej.

Drugi zarzut również nie jest uzasadniony. Jasną bowiem jest rzeczą, że postulaty mechaniki klasycznej należy uważać za ważne tylko w części hyperprzestrzeni fizycznej dostępnej dla naszych badań, Z drugiej zaś strony niema żadnych powodów do wykluczenia hypotezy, że reszta wszechświata nie jest bez wpływu na zjawiska, wydarzające się w tej jego części, która jest dla naszych badań dostępną.

Otóż wystarczy przyjąć, że ów wpływ objawia się przez istnienie układów spółrzędnych Galileusza, ażeby usunąć wszelkie trudności natury teoretyczno-poznawczej. Pogląd ten znajduje, jak sądzę, potwierdzenie w fakcie, że w praktyce układy spółrzędnych Galileusza są te, względem których ogół gwiazd porusza się, ze stopniem przybliżenia bardzo wielkim, ruchem translacyjnym, prostolinjowym i jednostajnym. Należy jeszcze dodać, że, jak to słusznie podnosi prof. Painlevé[1]), relatywiści także nie mogą obejść się bez przyjęcia istnienia pewnej szczególnej klasy układów spółrzędnych, skoro tylko przechodzą do jakichś zastosowań teorji względności w fizyce lub astronomji.

---

[1]) Notatka zacytowana na str. 23.

O TRZECH KLASYFIKACJACH
funkcji przedstawialnych analitycznie.

Napisał

Stefan Kempisty (Wilno).

Funkcję zmiennej rzeczywistej zbudowaną w całym obszarze zmienności według jednego prawa przy pomocy dodawania, mnożenia i przejścia do granicy nazywa Lebesgue przedstawialną analitycznie i dowodzi, że jedynie do takich funkcji daje się stosować klasyfikacja Baire'a[1].

Na wzór tej klasyfikacji utworzone zostały dwie inne przez pp. Younga i Sierpińskiego, przyczem punktami wyjścia stały się dwie różne co do formy definicje klas Baire'a.

W monografji Baire'a p. t. „Leçons sur les fonctions discontinues“[2]) znajdujemy następujące określenie:

1° funkcje ciągłe tworzą klasę zerową,

2° funkcja należy do klasy α jeśli jest granicą ciągu funkcji należących do klas $< \alpha$, o ile sama nie należy do jednej z tych klas.

Otóż możemy zamiast o „granicy ciągu“ mówić o „sumie szeregu“, gdyż suma skończonej ilości funkcji klasy α jest również funkcją klasy α. Zastępując dalej słowo „szereg“ przez „szereg bezwzględnie zbieżny“, dochodzimy do klasyfikacji Sierpińskiego, w której klasa pierwsza składa się z różnic funkcji na-

[1]) H. Lebesgue: Sur les fonctions représentables analytiquement. *Journal de Math.* 1905, str. 152—3.

[2]) R. Baire, Paris 1905, str. 126.

wpółciągłych górnie[1]). W celu wyróżnienia nowych klas nazywać je będziemy klasami bezwzględnemi.

Young, wychodząc z pierwotnej definicji Baire'a, tworzy nową klasyfikację przy pomocy ciągów monotonicznych, skąd powstaje konieczność rozróżniania typów odpowiadających ciągom nierosnącym i niemalejącym. Granice ciągów nierosnących funkcji ciągłych nazywa funkcjami typu u, gdyż są to funkcje nawpółciągłe górnie (upper semi-continuous functions) zaś granice ciągów niemalejących — funkcjami typu l (lower semi-continuous functions). Granice ciągów nierosnących, których wyrazami są funkcje typu l oznacza Young przez ul i t. d., stawiając zawsze na początku literę odpowiadającą ostatniemu ciągowi[2]). Symbolika taka jest dla Yonnga wystarczającą, gdyż rozpatruje on tylko funkcje otrzymane przy pomocy skończonej ilości przejść do granicy.

Ogólną definicję klasyfikacji Younga podałem w tomie II czas. *Fundamenta Mathematicae*[3]) można ją jednak uprościć, usuwając wymaganie, aby wyrazy ciągu były jednego typu, gdyż zawsze znajdzie się w ciągu nieskończenie wiele wyrazów jednego typu. Podobne określenia znajdujemy właśnie w niedawno wydanem dziele H. Hahna p. t. „Theorie d. reellen Funktionen"[4]), gdzie funkcje Younga klasy α nazwane są *funkcjami rzędu* α (α — ter Ordnung).

Określenie. Funkcje ciągłe są rzędu zero. Granice ciągów monotonicznych funkcji rzędu $<\alpha$ są rzędu α, o ile same nie są niższego rzędu. Funkcje rzędu α bywają dwóch typów: u i l, zależnie od tego, czy są granicami ciągów nierosnących, czy też niemalejących.

Nowe klasyfikacje nie doprowadzają nas oczywiście do funkcji nie objętych klasyfikacją Baire'a, obejmują jednak ze swej strony wszystkie funkcje przedstawialne analitycznie, jak to wynika z następujących własności:

1. Wszelka funkcja klasy α jest conajwyżej rzędu $\alpha+1$ i to obu typów.

---

[1]) W. Sierpiński: Sur les fonctions dévéloppables... *Fund. Math.* II. (1920) str. 18.

[2]) W. H. Young: On functions and their associated sets of points. *Proc. Sond. Math.* 12 (1914) str. 260.

[3]) S. Kempisty: Sur les séries itérées... str. 68.

[4]) Berlin 1921 (v. J. Springer). Kap. 5, § 3, str. 328.

2. Wszelka funkcja rzędu α jest conajwyżej klasy bezwzględnej α [1]).

Pierwsze z tych twierdzeń daje się odwrócić przy pomocy zbiorów Borela [2]). Otrzymamy również owo odwrotne twierdzenie na innej drodze, jako wynik dalszych rozważań.

Przedmiotem niniejszej rozprawy jest ustalenie nowych zależności między klasami Baire'a z jednej strony a klasami bezwzględnemi i rzędami z drugiej.

Zależności te wynikają z uogólnienia następujących twierdzeń:

3. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby funkcja była rozwijalną na szereg bezwzględnie zbieżny funkcji ciągłych, jest, aby była różnicą funkcji nawpółciągłych górnie [3]).

4. Jeśli $g(x)$ jest funkcją dolnie nawpółciągłą zaś $h(x)$ — górnie nawpółciągłą, przyczem

$$g(x) \geqslant h(x),$$

wówczas istnieje funkcja ciągła $f(x)$ spełniająca warunek

$$g(x) \geqslant f(x) \geqslant h(x)\ ^{4}).$$

5. Funkcja klasy pierwszej Baire'a daje się przybliżyć jednostajnie zapomocą różnicy funkcji nawpółciągłych górnie [5]).

Będziemy opierać się na lematach, których dowody znajdzie czytelnik we wspomnianym dziele Hahna [6]).

Lemat 1. Jeśli $f(x)$ jest funkcją typu u rzędu α, wówczas funkcja

$$\left\{ f(x) \right\} = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$$

jest conajwyżej rzędu α tegoż typu, co $f(x)$.

---

[1]) S. Kempisty, loc. cit tw. VI i V str. 71—2.

[2]) W. H. Young, loc. cit. str. 286 (dla α skończonych) oraz H. Hahn, loc. cit. tw. I str. 346.

[3]) W. Sierpiński, loc. cit. p. 18, warunek konieczny podany został przez p. S. Glassa.

[4]) H. Hahn: Über halbstetige u. unstetige Funktionen. Sitzungsberichte k. Akad. in Wien. Abt. IIa B. 126 (1917) str. 103.

[5]) S. Mazurkiewicz: Sur les fonctions de classe 1, Fund. Math. II (1920) str. 732, uogólnienie na funkcje nieograniczone — S. Kempisty str. 131.

[6]) Kap. V. § 3 twierdzenia: VI—IX i XI.

Lemat 2. Granica ciągu nierosnącego (niemalejącego) funkcji typu u (l) rzędu $\leqslant \alpha$ jest funkcją rzędu $\leqslant \alpha$, tegoż typu co wyrazy ciągu.

Lemat 3. Funkcja typu u (l) rzędu α jest granicą nierosnącego (niemalejącego) ciągu funkcji typu l (u) rzędu $< \alpha$.

Lemat 4. Suma funkcji typu u (l) rzędu $\leqslant \alpha$ jest funkcją rzędu $\leqslant \alpha$ typu $u(l)$.

Lemat 5. Jeśli $f(x)$ jest funkcją typu u (l) rzędu α, wówczas $-f(x)$ jest typu l (u) tegoż rzędu.

Twierdzenie I. Funkcja klasy bezwzględnej α jest różnicą funkcji typu u rzędu $\leqslant \alpha$.

Dowód. Funkcja $f(x)$ klasy bezwzględnej α jest sumą szeszeregu bezwzględnie zbieżnego funkcji $f_n(x)$ należących do klas bezwzględnych $< \alpha$.

Niech

$$\varphi_n(x) = \frac{f(x) - |f_n(x)|}{2} \qquad \psi_n(x) = \frac{-f_n(x) - |f_n(x)|}{2}$$

wówczas

$$f_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_n(x)$$

oraz

$$\varphi_n(x), \quad \psi_n(x) \leq 0.$$

Ponieważ zaś

$$|\varphi_n(x)|, \quad |\psi_n(x)| < |f_n(x)|,$$

więc z bezwzględnej zbieżności szeregu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

wynika, że istnieją sumy:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \tag{1}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x), \tag{2}$$

przyczem

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x).$$

Funkcje $f_n(x)$, jako należące do klas bezwzględnych $< \alpha$, należą oczywiście i do klas Baire'a $< \alpha$ a zatem $\varphi_n(x)$ oraz $\psi_n(x)$ będą na mocy określenia również klasy Baire'a $< \alpha$.

Otóż zgodnie z tw. 1, przytoczonem wyżej, wszelka funkcja klasy $\beta < \alpha$ jest rzędu $\beta + 1 \leqslant \alpha$ obu typów, a więc funkcje $\varphi_n(x)$ $\psi_n(x)$ są w szczególności typu u rzędów $\leqslant \alpha$.

Suma skończonej ilości wyrazów w każdym z szeregów (1) (2) jest na mocy lematu 4 funkcją typu u tegoż rzędu, co i wyrazy. Ponieważ zaś owe wyrazy są niewiększe od zera, więc sumy kolejne tworzą ciągi nierosnące a więc zmierzające, według lematu 2, do granic $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ typu u rzędu $\leqslant \alpha$.

Twierdzenie II. Różnica funkcji typu u (l) rzędu α jest funkcją klasy bezwzględnej $\leqslant \alpha$.

Dowód. Różnica funkcji typu u jest również różnicą funkcji typu l, mamy bowiem

$$\varphi(x) - \psi(x) = [-\psi(x)] - [-\varphi(x)],$$

gdy zaś $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ są typu u, wówczas na mocy lematu 5 funkcje $-\psi(x)$ i $-\varphi(x)$ są typu l. Mamy więc właściwie tylko jeden wypadek do rozpatrzenia.

Twierdzenie jest oczywiście prawdziwe, gdy $\alpha = 1$, jest to bowiem część przytoczonego twierdzenia 1. Aby można było zastosować zasadę indukcji pozaskończonej, pozostaje udowodnić, że jeśli nasze twierdzenie jest prawdziwe dla $\alpha < \beta$, wówczas zachodzi również przy $\alpha = \beta$.

Niech

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_n, \dots,$$
$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \dots, \psi_n, \dots$$

będą ciągami nierosnącemi funkcji klas monotonicznych $\alpha < \beta$ typu l a zmierzającemi do danych funkcji $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ rzędu β typu u (por. lemat 3).

Utwórzmy ciąg

$$\varphi_1 - \psi_1, \varphi_2 - \psi_1, \varphi_2 - \psi_2, \varphi_3 - \psi_2, \dots; \varphi_n - \psi_n, \varphi_{n+1} - \psi_{(n)} \dots$$

zmierzający do różnicy $\varphi(x) - \psi(x)$. Wyrazy tego ciągu są kolejnemi sumami skończonej ilości wyrazów szeregu

(3)

$$\varphi_1 - \psi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) - (\psi_2 - \psi_1) + \dots + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) - (\psi_{n+1} - \psi_n) + \dots$$

znakozmiennego, gdyż na mocy założenia

$$\varphi_{n+1}-\varphi_n \geqslant 0 \qquad \psi_{n+1}-\psi_n \geqslant 0.$$

Szereg wyrazów dodatnich

$$\frac{\varphi_1-\psi_1+|\varphi_1-\psi_1|}{2}-(\psi_2-\psi_1)-(\psi_3-\psi_2)+\dots-(\psi_{n+1}-\psi_n)+\dots$$

jest zbieżny, gdyż posiada sumę

$$\frac{\varphi_1-\psi_1+|\varphi_1-\psi_1|}{2}-\psi+\psi_1,$$

podobnież zbieżnym jest szereg wyrazów ujemnych

$$\frac{\varphi_1-\psi_1-|\varphi_1-\psi_1|}{2}+(\varphi_2-\varphi_1)+(\varphi_3-\varphi_2)+\dots+(\varphi_{n+1}-\varphi_n)+\dots,$$

którego sumą jest

$$\frac{\varphi_1-\psi_1-|\varphi_1-\psi_1|}{2}+\varphi-\varphi_1.$$

Zatem szereg (3) jest bezwzględnie zbieżny.

Ponieważ założyliśmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla rzędów $\alpha<\beta$, więc różnice:

$$\varphi_{n+1}-\varphi_n, \qquad \psi_n-\psi_{n+1}$$

są funkcjami klas bezwzględnych $\alpha<\beta$.

Suma szeregu (3), jako szeregu bezwzględnie zbieżnego takich różnic, jest więc klasy bezwzględnej β.

Wniosek 1. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby funkcja należała do klasy bezwzględnej $\leqslant\alpha$, jest, aby była różnicą funkcji rzędu $\leqslant\alpha$ jednego typu.

Twierdzenie III. Jeśli między funkcjami $g(x)$ i $h(x)$ rzędu $\alpha+1$ a należącemi odpowiednio do typów l i u zachodzi stosunek

$$g(x)>h(x),$$

wówczas istnieje funkcja $f(x)$, która jest różnicą funkcji jednego typu rzędu $\leqslant\alpha$ i spełnia warunek

$$g(x)\geqslant f(x)\geqslant h(x).$$

Dowód. Funkcja $g(x)$, na zasadzie lematu 3, jest granicą ciągu niemalejącego

(4) $$g_1, g_2, g_3 \dots, g_n, \dots$$

funkcji typu u rzędu $\leqslant \alpha$. Podobnie funkcja $h(x)$ jest granicą nierosnącego ciągu

(5) $$h_1, h_2, h_3, \dots, h_n, \dots$$

funkcji typu l rzędu $\leqslant \alpha$.

Utwórzmy szereg

(6)
$$g_1 + \{h_1 - g_1\} - \{h_1 - g_2\} + \{h_2 - g_2\} - \{h_2 - g_3\} + \dots \{h_n - g_n\} - \{h_n - g_{n+1}\} + \dots$$

stosowany przez Hausdorffa[1]) przy dowodzie twierdzenia Hahna (tw. 2), zakładając wraz z Hausdorffem

$$\{h_n - g_m\} = \frac{h_n - g_m + |h_n - g_m|}{2},$$

t. j. większej z liczb: zero i $h_n - g_m$.

Jeśli

$$g(x) > h(x)\ ^{2)},$$

wówczas może istnieć w danym punkcie x tylko skończona ilość wyrazów ciągu (5) lub (4) spełniających nierówność

$$h_n(x) \geqslant g_n(x),$$

zatem szereg (6) posiada w każdym punkcie skończoną ilość wyrazów i jest niewątpliwie bezwzględnie zbieżny. Sumę tego szeregu możemy więc przedstawić w postaci różnicy sum dwóch szeregów:

$$\varphi = \{h_1 - g_1\} + \{h_2 - g_2\} + \dots \qquad + \{h_n - g_n\} + \dots,$$

$$\psi = -g_1 + \{h_1 - g_2\} + \{h_2 - g_3\} + \dots \quad + \{h_n - g_{n+1}\} + \dots$$

Wyrazy obu szeregów są, na zasadzie określenia oraz lematów 5, 4 i 1, funkcjami typu l rzędu $\leqslant \alpha$. Ponieważ wyrazy te, prócz $-g_1$, muszą być na mocy tegoż określenia nie mniejsze od zera, więc ciągi sum skończonych będą niemalejące i jako niemalejące

---

[1]) F. Hausdorff: Über halbstetige Funktionen, *Math. Zeit.* 5 (1910) str. 295.

[2]) Przy $g(x) = h(x)$ nie jesteśmy pewni bezwzględnej zbieżności szeregu (6).

ciągi sum funkcji typu l rzędów $\leqslant \alpha$, będą zmierzały do granic $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ typu l rzędu $\leqslant \alpha$ (lematy 4 i 2). A więc suma szeregu (6) jest różnicą $\varphi - \psi$ funkcji typu l klasy $\leqslant \alpha$.

Ponieważ, jak zaznaczyliśmy wyżej, szereg (6) posiada w każdym punkcie skończoną ilość wyrazów, więc suma jego przybiera wartości $g_n(x)$ lub $h_n(x)$ zależnie od tego czy pierwszym wyrazem mniejszym od zera w ciągu

$$h_1 - g, h_1 - g_2, h_2 - g_2, h_2 - g_3, \dots \qquad , h_n - g_n, h_n - g_{n+1}, \dots$$

jest $h_n - g_n$ czy też $h_n - g_{n+1}$. W pierwszym wypadku mamy

$$g(x) \geqslant g_n(x) > h_n(x) \geqslant h(x),$$

w drugim

$$g(x) \geqslant g_{n+1}(x) > h_n(x) \geqslant h(x)$$

a więc w obu razach

$$g(x) \geqslant \varphi(x) - \psi(x) \geqslant h(x).$$

Zatem wymienioną w twierdzeniu funkcją $f(x)$ będzie różnica $\varphi(x) - \psi(x)$.

Wniosek 2. Jeśli $F(x)$ jest funkcją obu typów rzędu $\alpha + 1$ zaś ε liczbą dodatnią, wówczas istnieje funkcja $f(x)$, która jest różnicą funkcji rzędu $\leqslant \alpha$ jednego typu i spełnia warunek

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(Wystarczy założyć $g(x) = F(x) + \varepsilon$ zaś $h(x) = F(x) - \varepsilon$).

Wniosek 3. Jeśli $F(x)$ jest funkcją obu typów rzędu $\alpha + 1$ zaś ε liczbą dodatnią, wówczas istnieje funkcja $f(x)$ klasy bezwzględnej $\leqslant \alpha$, spełniająca nierówność

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(na mocy tw. II).

Wniosek 4. Funkcja obu typów rzędu $\alpha + 1$ jest granicą ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji klas bezwzględnych $\leqslant \alpha$.

(Obieramy malejący ciąg liczb dodatnich

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots, \varepsilon_n, \dots$$

zmierzający do zera. Odpowiednie przybliżenia

$$f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x), \dots$$

tworzą ciąg jednostajnie zbieżny o granicy $F(x)$).

Wniosek 5. Funkcja obu typów rzędu $\alpha + 1$ jest conajwyżej klasy α Baire'a.

(Ponieważ funkcje $f_n(x)$ są na mocy Wn. 4 klasy bezwzględnej $\leq \alpha$, a więc a fortiori klasy $\leq \alpha$ Baire'a, korzystamy z twierdzenia Lebesgue'a[1]), według którego granica ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji klasy $\leq \alpha$ należy do klasy $\leq \alpha$.

Wniosek 6. Jeśli $F(x)$ jest funkcją klasy α Baire'a zaś ε liczbą dodatnią, wówczas istnieje funkcja $f(x)$ klasy bezwzględnej $\leqslant \alpha$, spełniająca nierówność

$$|F(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

(Opieramy się na przytoczonym twierdzeniu Younga — tw. 1).

Wniosek 7. Funkcja klasy α Baire'a jest granicą ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji klas bezwzględnych $\leqslant \alpha$.

Wniosek 8. Warunkiem koniecznym i wystarczającym należenia funkcji do klasy $\leq \alpha$ Baire'a jest, aby była granicą ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji klas bezwzględnych $\leqslant \alpha$.

---

[1]) H. Lebesgue loc. cit. th. III.